目　录

第三章 平 面

第四章 空间直线

第五章 曲面方程和空间曲线方程

第六章　特殊曲面

第七章　二次曲面

第八章 二次曲面普遍方程的研究

附录 有关代数的一些知识

习题答案

第一章

空间直角坐标

在平面解析几何里，我们首先建立了平面直角坐标，使平面内的点和一对有序实数(坐标)建立了一一对应的关系. 然后在这个基础上，又建立了平面内的曲线和二元方程间的对应关系，从而可以利用代数运算来解决几何问题. 这就是平面解析几何的基本思想，其所用的方法就是坐标法.

在空间解析几何里，我们采用同样的思想来研究空间几何问题，所用的方法除坐标法外，还采用了向量法. 在这一章里，首先建立空间直角坐标系，使空间内的点和有序的三实数组(坐标)建立一一对应的关系. 然后利用坐标来解决一些基本问题——两点间的距离、空间的方向和线段的定比分点. 这些内容都是为将来进一步学习所必需的基本知识. 另一方面，这些内容又为第二章向量代数中某些概念的引入作了数学上的准备.

第一节　空间直角坐标系

1·1　右手系和左手系

我们知道，经过平面内一个定点 O，可以作两条互相垂直的有向直线 $x'Ox$ 和 $y'Oy$. 考虑到它们的位置关系，就有两种情况，如图 1-1 中的 (a) 和 (b)，为了方便，也可以用两条有向半直线表示成图 1-2 中的 (a) 和 (b).

下面我们来看一下图 1-2 中两个图的区别. 首先在它们

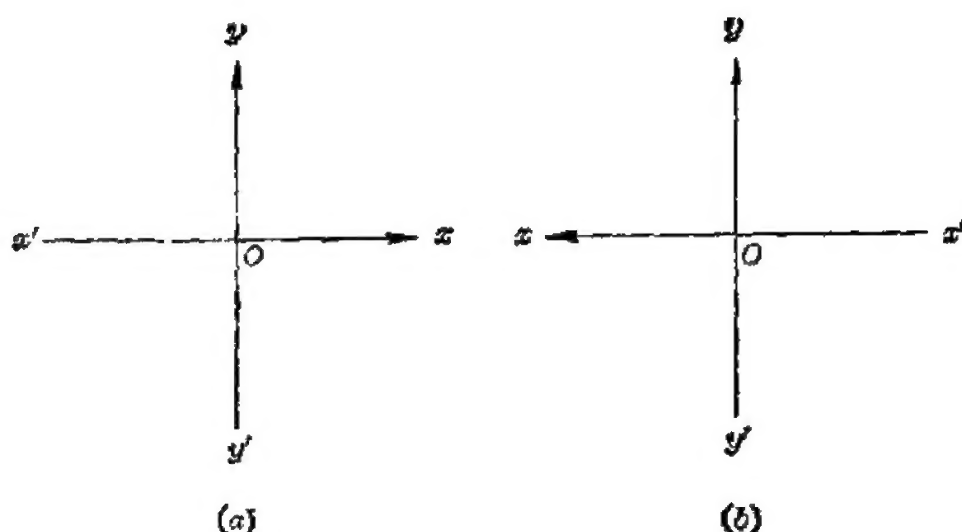


图 1-1

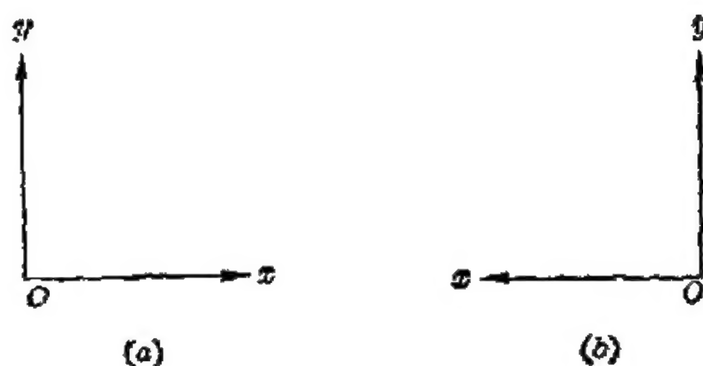


图 1-2

所在平面的一侧进行观察：在图(a)中 $\angle xOy$ 是正角，我们把 Ox, Oy 的这种排列顺序叫做*右手系*；而在图(b)中 $\angle xOy$ 是负角，我们把 Ox, Oy 的这种排列顺序叫做*左手系*．当选定了一个单位线段(也就是它的长度是一个单位)，我们就说：在图 1-1 的(a)或(b)中建立了一个平面直角坐标系．过去在平面解析几何里就是采取图 1-1(a)中所建立的那一种右手系．

现在我们把它推广到空间．经过空间内一点 O，作三条两两互相垂直的有向直线 $x'Ox$, $y'Oy$ 和 $z'Oz$．同样有两种情况出现，如图 1-3 中的(a)和(b)，其中正的部分用实线表示，负的部分用虚线表示，或者用三条有向半直线表示成两个直

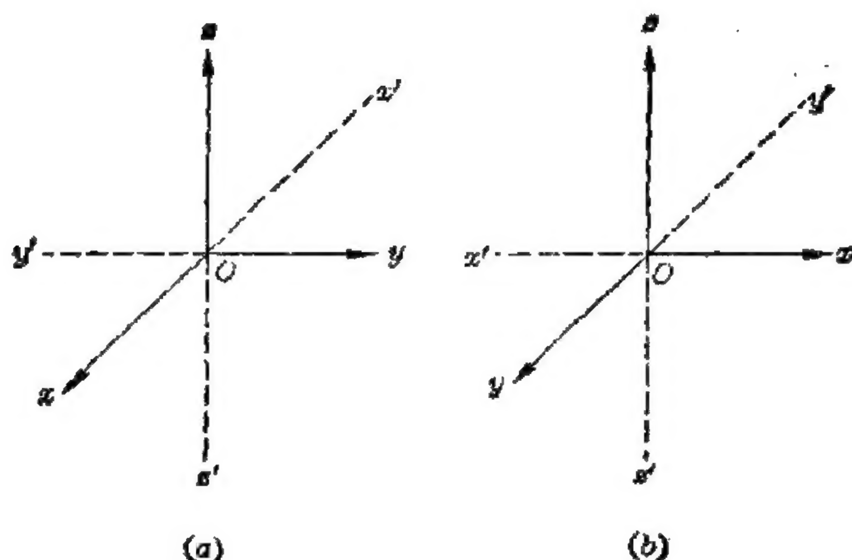


图 1-3

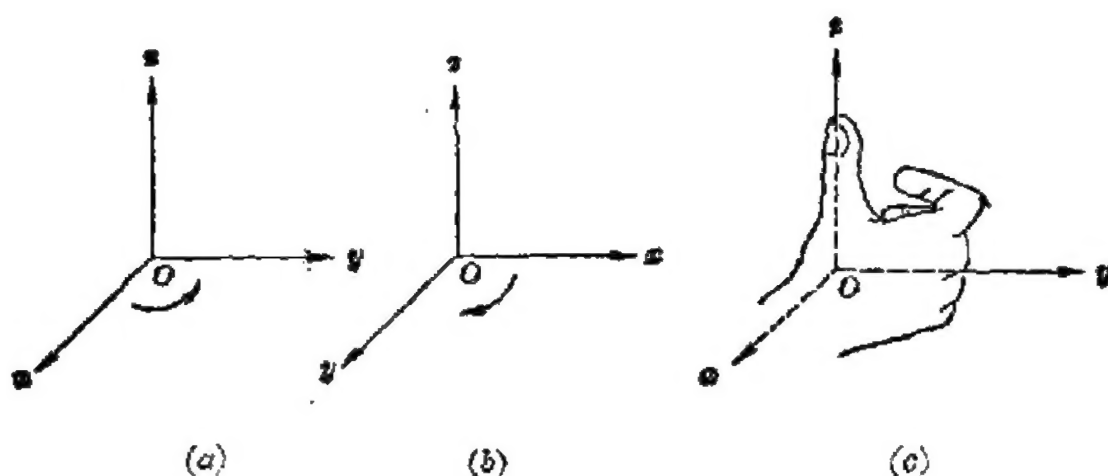


图 1-4

三面角，如图 1-4 中的 (a) 和 (b).

我们在图 1-4(c) 中以右手拇指直立表示 Oz 方向，将指掌弯成弧形，于是就可以看出：由指掌到指尖的转动方向将是 Ox 经过最短路径到 Oy 的转动方向．同样可以用左手来说明图 1-4(b) 的情况．或者将右手的拇指、食指、中指伸开，使互相垂直（见图 1-5(a)），以拇指指 Ox 的方向，食指指 Oy 的方向，则中指所指的方向为 Oz 的方向，此与图 1-4(a) 相适合．同样，图 1-5(b) 与图 1-4(b) 相适合．

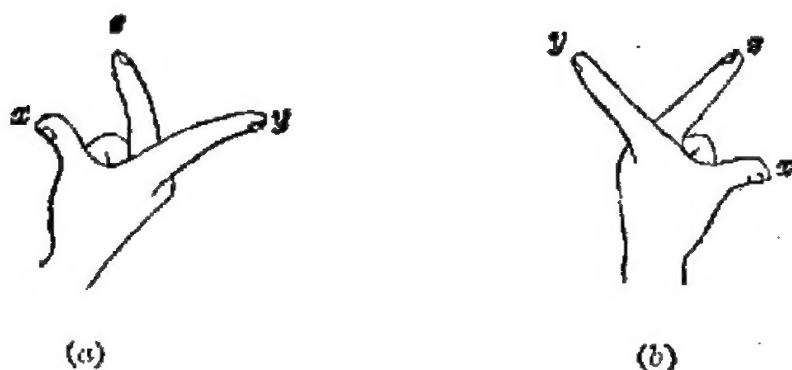


图 1-5

因此，我们将图 1-4(a) 叫做右手系；图 1-4(b) 叫做左手系. 它们是由有向半直线的位置关系不同而区分的. 为了和工程技术的要求相配合，从现在坐标系的建立和后面向量的运算都采用右手系.

【例 1】 说明图 1-6 中的直三面角哪一个是右手系？

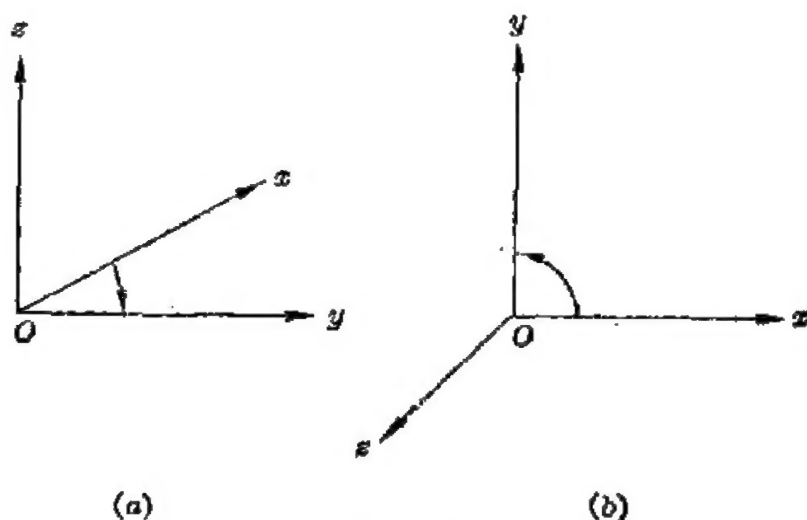


图 1-6

解：图 1-6(a) 表示左手系. 在图 1-6(b) 中以右手拇指向前表示 Oz. 将指掌弯成弧形，于是指掌到指尖的转动方向是 Ox 经过最短路径到 Oy 的转动方向，于是它表示右手系.

1·2 空间点的坐标

在平面解析几何里，为了确定点的位置，我们首先建立了

直线上点的坐标系以及平面内点的坐标系．然后就可以确定直线或平面内点的位置，它们分别用一个实数或一对有序实数来确定．于是，我们就得知直线上点的坐标只有一个，平面内点的坐标有两个．现在将其推广到空间情况上去．

采取图 1-3(a) 或 1-4(a) 并选定一个单位线段，我们就建立起一个空间笛氏直角坐标系，简称空间直角坐标系，它是一种最简单而又特别适用的坐标系，记作 $Oxyz$．定点 O 叫做原点．三条有向直线 $x'Ox$, $y'Oy$ 和 $z'Oz$ 叫做坐标轴，分别叫做第一轴、第二轴和第三轴或横轴、纵轴和立轴，简称为 x 轴、y 轴和 z 轴．三个平面 $y'yz'z$、$z'zx'x$ 和 $x'xy'y$ 叫做坐标面，分别叫做第一面、第二面和第三面，简称为 yz 面、zx 面和 xy 面．

现在我们利用一个房间作为空间直角坐标系的模型（图 1-7）．以屋中的地面为 xy 面，所面对的墙面为 yz 面，左面的墙面为 zx 面，使它们与图 1-4(a) 一致．于是 x 轴是左墙面和地面的交线，y 轴是前墙面和地面的交线，z 轴就是两个墙面的交线．原点就是前、左、地三面的交点．这样用直观易懂的实物来说明空间坐标系，对以后研究问题就比较容易理解了．

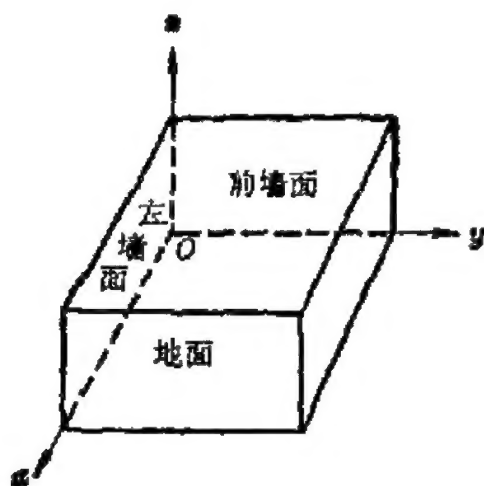


图 1-7

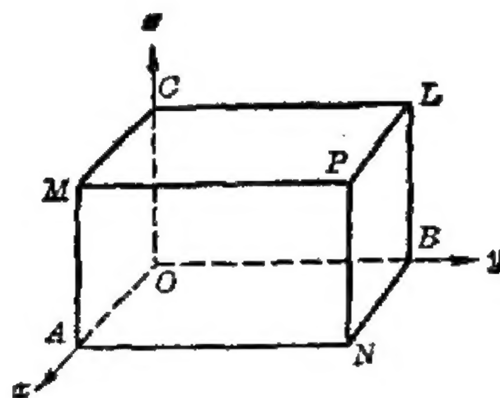


图 1-8

建立了空间直角坐标系以后，空间任意点 P 的位置就可以按下面的方法来确定. 通过 P 点分别作三个坐标面的平行平面，它们分别交三个坐标轴于 A、B 和 C. 这三个平面和三个坐标面围成一个长方体 $OANB-CMPL$, 叫做 P 点的坐标长方体. O 点和 P 点是它的两个斜对顶点（图 1-8). 利用单位线段来度量有向线段 $\overline{OA}$[注]、$\overline{OB}$ 和 $\overline{OC}$ 的量数，分别是 $OA=x$, $OB=y$ 和 $OC=z$. 事实上，这三个实数是分别与三条坐标轴相对应的，因而也就随着排定了次序，象这样排定次序的三个实数叫做一个三元数组，记作 (x, y, z). 这就是说，对于空间任意一点 P，就能得到唯一的一个三元数组和它相对应. 反过来，如果有一个三元数组 (x, y, z)，我们可以把 x 看成是 x 轴上某一条有向线段 $\overline{OA}$ 的量数，把 y 看成是 y 轴上某一条有向线段 $\overline{OB}$ 的量数，把 z 看成是 z 轴上某一条有向线段 $\overline{OC}$ 的量数. 然后由 A、B 和 C 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂面，这三平面的交点 P 就和三元数组相对应. 这就是说，任何一个三元数组可以确定空间唯一的点和它对应. 因此我们说，空间内的点与三元数组之间建立了一一对应的关系. 于是把三元数组 (x, y, z) 叫做点 P 关于坐标系 $Oxyz$ 的直角坐标，以后简称为坐标，并将坐标是 (x, y, z) 的点 P，简记作 $P(x, y, z)$，其中 x、y 和 z 分别叫做 P 点的横坐标（简称横标）、纵坐标（简称纵标）和立坐标（简称立标）.

现在我们来看原点、坐标轴上的点和坐标面上的点的坐标. 在图 1-8 中，过 A 点作三个坐标面的平行平面，它们和坐标轴的交点分别是 A、O 和 O，因此有 $A(x, 0, 0)$. 同样地，可以得出 $B(0, y, 0)$ 和 $C(0, 0, z)$. 再过 yz 面上 L 点

[注] 我们以 $\overline{OA}$ 表示以 O 为起点，A 为终点的有向线段，OA 表示它的量数，$|OA|$ 表示它的长度，余类推.

作三个坐标面的平行平面，它们和坐标轴的交点分别是 O、B 和 C，因此有 $L(0, y, z)$. 同样地可以得出 $M(x, 0, z)$ 和 $N(x, y, 0)$.

为了有一个直观的感觉，下面介绍空间直角坐标系的一般画法. 首先把 y 轴画为水平的，并规定从左到右为正向；其次把 z 轴画为铅直的，从下到上为正向；最后把 x 轴画为指向左下方，且它的正向与 y 轴的正向的交角为 $135°$. y 轴和 z 轴上的单位线段取作相同，x 轴上的单位线段则取为 y 轴上的单位线段的一半，见图 1-9(a). 如果采用方格纸来画图，和上面一样，先作出坐标轴再取方格纸的一个方格的一边为 y 轴和 z 轴上的一个单位线段，为作图方便起见，取方格的对角线为 x 轴上的两个单位线段，见图 1-9(b).

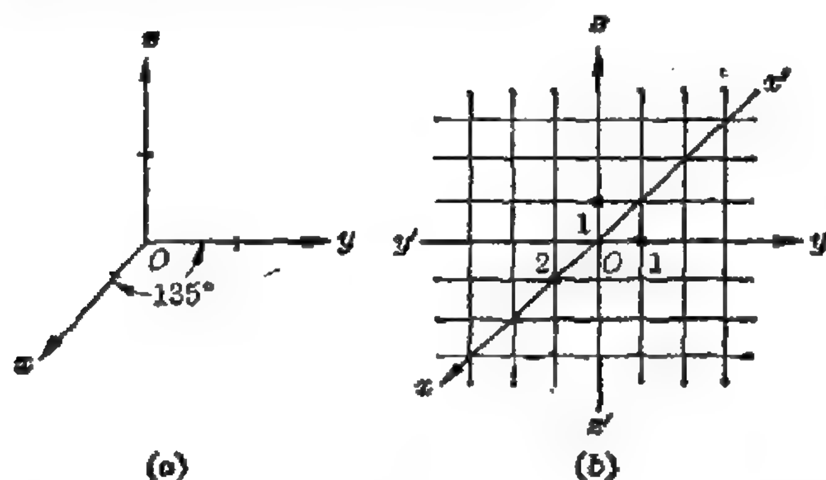


图 1-9

用这种方法作出 $Q(2, 2, \sqrt{2})$，$R(4, -2, 3)$ 和 $S(-2, -3, -1)$ 三个点(见图 1-10).

下面我们推求空间一点到三个坐标面和三条坐标轴的距离. 设有点 $P(x, y, z)$. 在图 1-8 中，

$$P \text{ 到 } yz \text{ 面的距离} = |LP| = |OA| = |x|,$$

同样地，P 到 zx 面和 xy 面的距离分别是 $|y|$ 和 $|z|$.

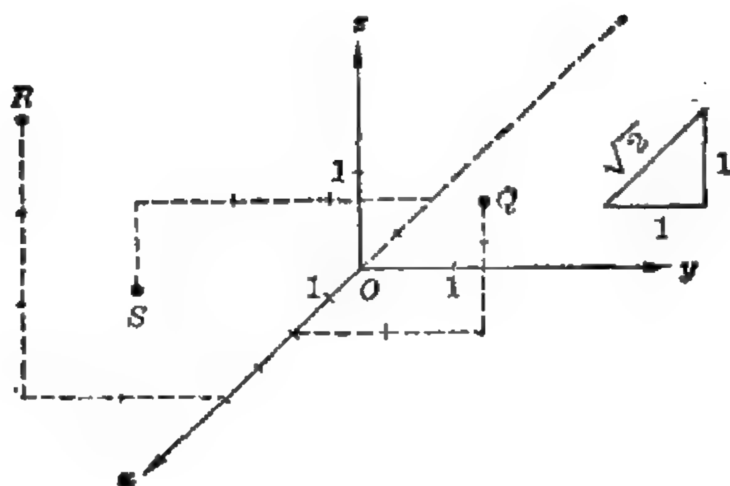


图 1-10

因为 x 轴和平面 $PMAN$ 相垂直，由立体几何知识可知：x 轴和 PA 垂直．于是由勾股定理得：

P 到 x 轴的距离 $=|PA|=\sqrt{AN^2+NP^2}=\sqrt{y^2+z^2}$.

同样可求得：P 到 y 轴和 z 轴的距离分别是 $\sqrt{z^2+x^2}$ 和 $\sqrt{x^2+y^2}$.

将上面所述归纳起来就得到以下定理：

定理1 点 $P(x, y, z)$ 到三个坐标面的距离分别是 $|x|$, $|y|$ 和 $|z|$；到三条坐标轴的距离分别是 $\sqrt{y^2+z^2}$, $\sqrt{z^2+x^2}$ 和 $\sqrt{x^2+y^2}$.

【例2】 设 $P(6, 5, 4)$，(1)求它的坐标长方体所有顶点的坐标；(2)求它在三个坐标面内的射影的坐标；(3)求它在三条坐标轴上的射影的坐标；(4)求它到三个坐标面的距离；(5)求它到三条坐标轴的距离．

解：(1) 在图 1-8 中由于 $OA=6$, $OB=5$, $OC=4$，于是得各顶点的坐标为：

$A(6, 0, 0)$、$B(0, 5, 0)$、$C(0, 0, 4)$、$L(0, 5, 4)$、$M(6, 0, 4)$ 和 $N(6, 5, 0)$.

(2) P 在三个坐标面内的射影分别是 L、M 和 N.

(3) P 在三条坐标轴上的射影分别是 A、B 和 C.

(4) 由定理 1 可知：P 到三个坐标面的距离分别是 6, 5 和 4.

(5) 由定理 1 可知：P 到三条坐标轴的距离分别是 $\sqrt{5^2+4^2}$, $\sqrt{4^2+6^2}$ 和 $\sqrt{6^2+5^2}$，即 $\sqrt{41}$, $\sqrt{52}$ 和 $\sqrt{61}$.

1·3 卦限和坐标的符号

为了便于理解，现在用前面所提到的直角坐标系的模型来说明一些性质：

在坐标系 $Oxyz$ 里，yz 面将整个空间分为两个半空间，其中包含 x 轴正向的一半叫做*前半空间*，另一半叫做*后半空间*；xz 面将整个空间分为两个半空间，含 y 轴正向的一半叫做*右半空间*，而另一半叫做*左半空间*；最后，xy 面也将整个空间分为两个半空间，其中包含 z 轴正向的一半叫做*上半空间*，而另一半叫做*下半空间*. 由于前半空间包含 x 轴正向的那一半（或说正向的有向半直线），因此凡在这半空间内的点与 yz 面平行的平面必与 x 轴相交，故这些点的横标必是正的，其它两个坐标可正可负，在后半空间内，诸点的横标必是负的，其它两个坐标可正可负. 至于其它情况，则可完全类似地推出.读者试自行考虑.

同时，三个坐标面又把整个空间分成八个部分，每一部分叫*卦限*，共有八个卦限. 显然，坐标面内的点不属于任何卦限. 如同平面内四个象限的编号一样，空间的卦限也可以按照一定的规律来编号. 同时在前、右、上三个半空间的部分叫做*第 I 卦限*；同时在后、右、上三个半空间的部分叫做*第 II 卦限*；同时在后、左、上三个半空间的部分叫做*第 III 卦限*；同时在前、左、上三个半空间的部分叫做*第 IV 卦限*. 在下半空间

而位于这四个卦限下面的四个卦限分别叫做第 V、第 VI、第 VII、第 VIII 卦限．如图 1-11，在第 I 卦限内的点的坐标全是正的，简记作(+，+，+)，在第 II 卦限内的点的坐标则为(－，+，+)，其它情况完全可以类似地推出．现归纳列表如下：

卦限 / 坐标	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

于是不在坐标面上的点，只要根据它们坐标的符号就可以确定它们所在的卦限。

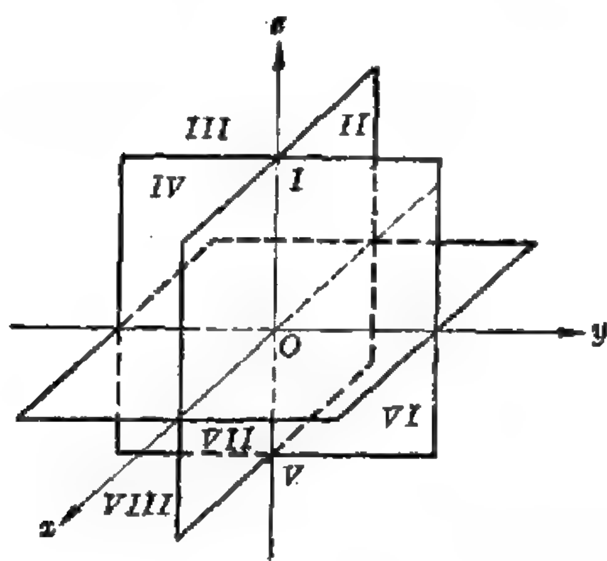


图 1-11

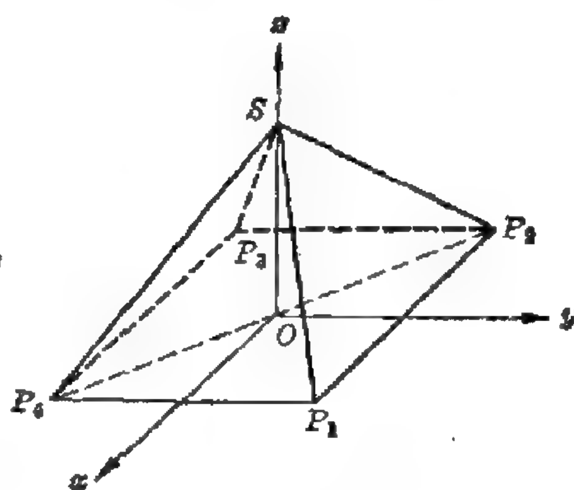


图 1-12

【例 3】 设一个正四棱锥 $S—P_1P_2P_3P_4$ 的底面在 xy 面内，底面中心在原点，各棱的长均是 a，棱 P_1P_2 垂直于 y 轴，棱 P_1P_4 垂直于 x 轴，顶点 S 在 $+z$ 轴上．求 S、P_1、P_2、P_3

和 P_4 的坐标.

解：在图 1-12 中，由于底面是正方形，可得底面四个顶点的坐标为：

$$P_1\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ 0\right)、P_2\left(-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ 0\right)、P_3\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2},\ 0\right)$$

和 $P_4\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2},\ 0\right)$.

$$|OP_2|=\frac{1}{2}\ |P_4P_2|=\frac{1}{2}\sqrt{P_1P_4^2+P_1P_2^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

又 $OS\perp P_4P_2$，所以

$$|OS|=\sqrt{SP_2^2-OP_2^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

故得 $S\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$.

【例 4】 设有点 $P(x,\ y,\ z)$，求它关于三个坐标面，三条坐标轴和原点的对称点的坐标.

解：为了说明方便，设 $P(x,\ y,\ z)$ 在第 I 卦限内，则它关于 yz 面的对称点 P_1 就在第 II 卦限内．这两个点的横标的符号相反，但绝对值相同（绝对值就是 P、P_1 到 yz 面的距离）．它们的纵标和立标则分别相同，因此就得到 $P_1(-x,\ y,\ z)$．同理，P 关于 zx 面和 xy 面的对称点的坐标分别是 $(x,\ -y,\ z)$ 和 $(x,\ y,\ -z)$．

下面我们再求 P 关于坐标轴对称点的坐标：在图 1-8 中，将 PB 延长到 P' 使 $PB=BP'$，则 P 和 P' 关于 y 轴对称．过 P 和 P' 作 yz 面的平行平面分别交 x 轴于 A 和 A'．由于这两个平面与 yz 面均平行，且 PP'、AA' 两直线与 yz 面分别交

于 B 和 O，于是由立体几何里"两直线被三个平行平面截成比例线段"这一性质可知：

$$AO/OA'=PB/BP'.$$

由于 $PB=BP'$，故得 $OA'=-OA=-x$. 即 P' 的横标是 $-x$. 同样可以推出 P' 的立标是 $-z$. 又由 P 和 P' 均在过 B 点与 zx 面平行的平面内，故 P' 的纵标是 y. 因此得 $P'(-x, y, -z)$. 同样 P 关于 x 轴和 z 轴的对称点分别是 $(x, -y, -z)$ 和 $(-x, -y, z)$.

再延长 PO 到 $\bar{P}$，使 $|O\bar{P}|=|OP|$，则 $\bar{P}$ 将是 P 关于原点的对称点. 过 P 和 $\bar{P}$ 作 yz 面的平行平面分别交 x 轴于 A 和 $\bar{A}$，则有

$$OA/\bar{A}O=OP/\bar{P}O, \quad 故得 \quad O\bar{A}=OA=x.$$

即 $\bar{P}$ 的横标是 $-x$. 同样可以推出，$\bar{P}$ 的纵标和立标分别是 $-y$ 和 $-z$. 从而得 $\bar{P}(-x, -y, -z)$.

当 P 在其它卦限内，上面的结论同样正确，读者自行考虑.

1·4 坐标系的平移

所谓空间坐标系的平移，就是移动坐标系的原点而不改变坐标轴的方向和单位线段. 这和平面解析几何里的坐标系的平移完全一样. 下面我们来推求坐标系的平移公式.

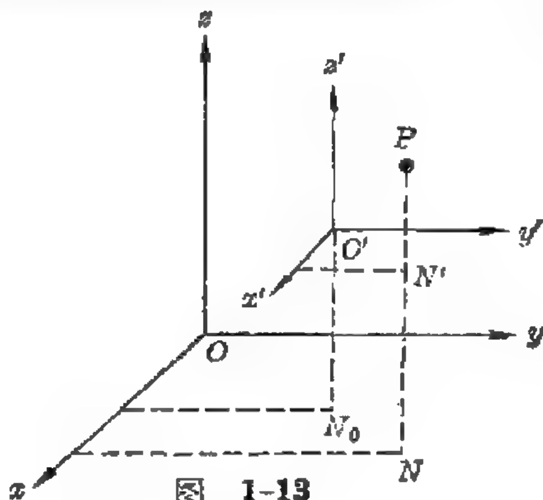


图 1-13

设有两个坐标系 $Oxyz$ 和 $O'x'y'z'$ 分别称为旧系和新系，且 $Ox \parallel O'x'$，$Oy \parallel O'y'$，

$Oz \parallel O'z'$（图 1-13）. 设空间一点 P 关于旧系和新系的坐标分别是 (x, y, z) 和 (x', y', z'). 又 O' 关于旧系的坐标是 (a, b, c). 自 P 到 xy 面作垂线与 $x'y'$ 面交于 N', 与 xy 面交于 N. 又自 O' 到 xy 面作垂线与 xy 面交于 N_0. 于是 N_0O' 和 NN' 是两平行平面间的距离，故必相等，从而得

$$NP = N'P + NN' = N'P + N_0O'.$$

故有 $z = z' + c$. 同样可以得出 $x = x' + a$, $y = y' + b$. 故有以下定理：

定理 2 设有坐标系 $Oxyz$ 平移到坐标系 $O'x'y'z'$, 且新原点在旧系下的坐标是 (a, b, c), 空间任意一点 P 在旧系和新系下的坐标分别是 (x, y, z) 和 (x', y', z'), 于是有

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c. \tag{1}$$

例如以 $(-2, -3, -7)$ 为新原点 O', 由公式 (1) 容易推出 $P(3, 4, 5)$ 在新系下的坐标是 $(5, 7, 12)$.

1·5 简单轨迹问题

我们已经看到 yz 面上任一点的坐标是 $(0, y, z)$, 于是 yz 面上的点横标是零. 反过来，如果一点的横标是零，则这点必在 yz 面上. 将这两种说法合并起来，就是说：横标是零的点的轨迹是 yz 面，也可以说：动点 $P(x, y, z)$ 适合条件 $x=0$, 则它的轨迹是 yz 面. 简单地说，方程 $x=0$ 就表示 yz 面，应该注意，这与平面解析几何里 $x=0$ 表示 y 轴是相同的道理. 同样地 $x>0$ 表示前半空间；$x<0$ 表示后半空间. 在图 1-8 中如果 $OA=a$, 则 $PMAN$ 平面内任一点的横标都是 a. 反过来，如果一点的横标是 a, 则这点就必在 $PMAN$ 平面内. 于是就可推出 $x=a$ 表示过点 $(a, 0, 0)$ 且与 yz 面平行的一个平面 π. 至于不等式 $0<x<a$, 则表示 yz 面与平面 π 所围的区域，

但并不包含这两个平面；而不等式 $0\leqslant x\leqslant a$ 则表示 yz 面与平面 π 所围的区域并且包含这两个平面.

我们又知道 x 轴上一点的坐标是 $(x, 0, 0)$，这就是说，它的纵标和立标都是零. 反过来，如果一点的纵标和立标都是零，则这点必在 x 轴上. 于是我们说，纵标和立标是零的点的轨迹是 x 轴. 也就是说，动点 $P(x, y, z)$ 适合条件 $y=z=0$ 时，它的轨迹是 x 轴. 或简单地说，方程组 $y=z=0$ 表示 x 轴. 在图 1-8 中，如果 $OB=b$, $OC=c$. 则 NP 上所有点的射影都是 $N(0, b, c)$，也就是说，方程组 $y=b$, $z=c$ 表示过 $(0, b, c)$ 且与 x 轴平行的直线.

【例 5】 求到两个互相垂直的平面有相等距离的点的轨迹方程.

解：仿照平面解析几何里点的轨迹问题的解法，首先建立相应的坐标系. 我们以已知的两个平面作为 yz 面和 zx 面，再作一个平面和它们的交线 z 轴相垂直，这就形成一个直角坐标系. 设 $P(x, y, z)$ 为轨迹上的任意一点，则它到 yz 面和 zx 面的距离分别是 $|x|$ 和 $|y|$，由假设条件：$|x|=|y|$ 或者 $x=\pm y$. 这就是所求的轨迹方程，至于它的形状，后面再讨论.

【例 6】 求到定直线有定距离的点的轨迹方程.

解：以定直线为 z 轴，在它上面任取一点为原点，作 x 轴和 y 轴而建立直角坐标系. 设 $P(x, y, z)$ 为轨迹上任意一点，由定理 1 可知：它到 z 轴的距离是 $\sqrt{x^2+y^2}$. 根据假设 $\sqrt{x^2+y^2}=k$（k 是常数），两端平方得

$$x^2+y^2=k^2.$$

这就是所求的轨迹方程. 至于它的形状，后面再讨论.

【例 7】 设一定直线和一定平面相垂直，求到这直线和

平面有相等距离的点的轨迹方程.

解：以定直线和定平面分别作为 z 轴和 xy 面，交点为原点，再在 xy 面内作 x 轴和 y 轴而建立直角坐标系．设 $P(x, y, z)$ 为轨迹上任意一点，则它到 z 轴的距离是 $\sqrt{x^2+y^2}$，它到 xy 面的距离是 $|z|$，由假设：$\sqrt{x^2+y^2}=|z|$．两端平方得

$$x^2+y^2=z^2.$$

这就是所求的轨迹方程．至于它的形状，后面再讨论.

习 题 1·1

1．说明图中的直三面角哪一个是右手系？



第 1 题图

2．作出点 $A(1, 1, 2)$、$B(-4, 3, 2)$和$(-6, -1, 3)$.

3．已知点 $A(-3, 2, 1)$ 和 $B(2, -3, 0)$，分别求它们在三个坐标面和三条坐标轴上的射影的坐标.

4．推求 $(-3, 2, -1)$ 关于三个坐标面、三条坐标轴以及原点的对称点的坐标.

5．说明下列各点在哪一个卦限？

(1) $(-1, 2, \sqrt{3})$;　　(2) $\left(\sin\frac{5}{3}\pi, \cos\frac{5}{3}\pi, \operatorname{tg}\frac{5}{3}\pi\right)$.

6．坐标适合下列条件的点在哪几个卦限内？

(1) $y-z=0$;　(2) $y+z=0$;　(3) $z-x=0$;

(4) $z+x=0$;　(5) $x-y=0$;　(6) $x+y=0$.

7．有个房间长 5 米(从前到后)，宽 4 米(从左到右)，高 3 米(从下到

上). 如果以我们面对的墙面为前墙面,连同左墙面和地面为坐标面而建立直角坐标系, 求这房间内下列各点的坐标: (1)前、右、下角; (2)前、右、上角; (3)后、左、下角; (4)前、左、上角; (5)后、右、下角; (6)后、右、上角; (7)前墙面中心; (8)左墙面中心; (9)地面中心; (10)房顶面中心.

8. 设一个正四棱锥 $S-P_1P_2P_3P_4$ 底面的四个顶点 P_1, P_3, P_2, P_4 分别在 $+x$ 轴, $-x$ 轴, $+y$ 轴, $-y$ 轴上, 其高为 h, 底棱长为 a. 求各顶点的坐标.

9. 说明下列方程各表示什么图形?

(1) $y=0$; (2) $z=0$;

(3) $y=b$ ($b\neq 0$, 是常数); (4) $z=c$ ($c\neq 0$, 是常数).

10. 说明下列方程组各表示什么图形?

(1) $z=x=0$; (2) $x=y=0$;

(3) $y=b$; $z=c$ ($b\neq 0$, $c\neq 0$, 是常数);

(4) $z=c$, $x=a$ ($c\neq 0$, $a\neq 0$, 是常数).

11. 说明下列不等式或不等式组所表示的图形.

(1) $0<y<b$; (2) $0\leqslant y\leqslant b$;

(3) $0<z<c$; (4) $0\leqslant z\leqslant c$;

(5) $0<x<a$, $0<y<b$, $0<z<c$;

(6) $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$

(a, b, c 是正常数).

12. 求到两个互相垂直的平面的距离之比是常数的点的轨迹方程.

13. 已知一条定直线垂直于一个定平面. 求到定直线和定平面的距离之比是常数的点的轨迹方程.

14. (1)如果一条直线和 xy 面平行, 则这条直线上的点的坐标有什么特征? (2)如果和 y 轴平行,则又怎样?

*15. 已知两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

(1)如果 $\overline{P_1P_2}$ 和 xy 面平行, 求这两点间距离; (2)如果 $\overline{P_1P_2}$ 和 y 轴平行,求这两点间距离.

[提示: (2)过 P_1 和 P_2 作平面与 zx 面平行且交 y 轴于 R_1 和 R_2, 则 $|P_1P_2|=|R_1R_2|$.]

第二节　两点间的距离

2·1　两点间的距离

两点间的距离是几何中最基本的概念之一．利用它可以研究图形的许多性质．在平面解析几何里，我们已经学习过两点间的距离公式，它是由勾股定理推出来的．

在空间，利用勾股定理可以推出"长方体一条对角线的平方等于它的长、宽和高的平方和"．为了方便，首先推出一点 $P(x, y, z)$ 和原点间的距离公式，然后利用平移公式再推出 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 两点间的距离公式．

在图 1-8 的坐标长方体中，它的三条棱的长度分别是 $|OA|=|x|$，$|OB|=|y|$ 和 $|OC|=|z|$，OP 是它的一条对角线，于是

$$OP^2=OA^2+OB^2+OC^2=x^2+y^2+z^2,$$

也就是

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1}$$

如果以 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 为新原点，作坐标系的平移，则得坐标变换公式

$$x=x'+x_1,\ y=y'+y_1,\ z=z'+z_1. \tag{2}$$

这里 (x, y, z) 和 (x', y', z') 分别表示同一点在旧系和新系下的坐标．于是 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 在新系下的坐标是 $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$．利用公式(1)即得

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{3}$$

综上所述，则得

定理 1　空间一点 $P(x, y, z)$ 和原点间的距离是

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$间的距离是

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

【例1】 试证点 $A(-3, -3, -3)$、$B(5, -1, -1)$、$C(-1, 5, -1)$和 $D(-1, -1, 5)$ 是一个正四面体的四个顶点，且这四面体的中心在原点．

【证】 根据公式(3)，得

$$|AB|=\sqrt{(5+3)^2+(-1+3)^2+(-1+3)^2}=6\sqrt{2}.$$

同样，其它两点间的距离均是 $6\sqrt{2}$，即

$$|AB|=|AC|=|AD|=|BC|=|BD|=|CD|=6\sqrt{2}.$$

这说明四点 A、B、C 和 D 中每三个点都作成一个正三角形，这样的正三角形共有四个．但平面内的四个点不可能作成四个正三角形，故这四点必是一个正四面体的四个顶点． 又由公式(1)得

$$|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=3\sqrt{3}.$$

所以这四点都和原点等距，也就是说：原点是这个四面的中心．】

【例2】 已知两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，作

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

和 $$d_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

(1) 说明 d 和 d_1 的几何意义；

(2) 证明 $d\geqslant d_1$，并说明这个不等式的几何意义．

【解及证】 (1) d 表示 P_1 和 P_2 两点间的距离．又 P_1 和 P_2 在 xy 面上的射影是 $N_1(x_1, y_1, 0)$和 $N_2(x_2, y_2, 0)$，于是

$$d_1=|N_1N_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

(2) 由于$(z_2-z_1)^2\geqslant 0$，故得

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\geqslant(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

将上式两端开方并取算术根，即得 $d \geqslant d_1$.

这不等式说明空间两点间的距离不小于它们在 xy 面上射影间的距离. 当 P_1P_2 与 xy 面平行时，则 $z_1=z_2$，从而得 $d=d_1$.

2·2 简单轨迹问题

【例 3】 求到两个定点距离相等的点的轨迹方程.

解：以两定点 A 和 A' 所成的线段 $A'A$ 的中点为原点，两点所在的直线为 x 轴，再作 y 轴和 z 轴来建立直角坐标系. 于是有 $A(a, 0, 0)$ 和 $A'(-a, 0, 0)$（其中 $a\neq 0$）. 设 $P(x, y, z)$ 为轨迹上的任意一点，由假设条件 $|PA|=|PA'|$，利用公式(3)可以推出

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2},$$

平方化简得
$$4ax=0.$$

由于 $a\neq 0$，故有 $x=0$. 此方程表示 yz 面恰好是线段 $A'A$ 的垂直平分面，这与立体几何里到线段两端等距离的点的轨迹是它的垂直平分面这一结果相符合.

【例 4】 求到定点的距离为定数的点的轨迹方程.

解：以定点为原点建立直角坐标系，设 $P(x, y, z)$ 为轨迹上的任意一点. 由假设条件 $|OP|=k$（k 是常数），利用公式(1)，可以推出

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k,$$

平方得
$$x^2+y^2+z^2=k^2.$$

这就是所求的轨迹方程，以后将讨论它的形状.

习　题　1·2

1．求证$(-3, 2, -7)$，$(2, 2, -3)$和$(-3, 6, -2)$是一个等腰三角

形的三个顶点.

2. 求证(1, 2, 3), (3, 1, 2)和(2, 3, 1)是一个等边三角形的三个顶点.

3. 求证(1, 2, 3), (3, 1, 5)和(2, 4, 3)是一个直角三角形的三个顶点.

4. 求到点(0, 0, 0)、(0, 2, 0)、(1, 0, 0)和(0, 0, 4)等距离的点的坐标.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标, 利用距离公式判定它是哪种三角形?

   (1) $A(7, 3, 4)$、$B(1, 0, 6)$和$C(4, 5, -2)$;

   (2) $A(0, 0, 0)$、$B(1, -1, 1)$和$C(-1, 2, 1)$;

   (3) $A(2, 1, 4)$、$B(3, -1, 2)$和$C(5, 0, 6)$.

   [提示: 由余弦定理: $\angle A$ 是锐、直或钝角$\Leftrightarrow a^2$小于、等于或大于b^2+c^2.]

6. 求证(3, 7, 2), (4, 3, 1), (1, 6, 3)和(2, 2, 2)是一个平行四边形的四个顶点.

7. 求证(6, −6, 0), (3, −4, 4), (2, −9, 2)和(−1, −7, 6)是一个菱形的四个顶点.

8. 求证四点(1, −1, −1), (−1, 1, −1), (−1, −1, 1)和(1, 1, 1)是一个正四面体的四个顶点, 且这四面体的中心在原点.

9. 求到两个定点的距离的平方和是一个常数的点的轨迹. 当平方差是常数时, 又是怎样? 分别用方程表示.

*10. 已知一条直线上的三个定点 A、B、C, 又知 P 是这条直线上的任意一点, 试证

$$PA^2\cdot BC+PB^2\cdot CA+PC^2\cdot AB=\text{常数}.$$

   这里 PA、BC 等都是表示有向线段的量数.

   [提示: 以定直线为 x 轴建立坐标系, 则可设 $A(a, 0, 0)$, $B(b, 0, 0)$, $C(c, 0, 0)$, 这里 a, b, c 都是常数. 定直线上的任一点可设为 $P(p, 0, 0)$. 这里所要证的结果为常数, 是指不含 P 点的坐标.]

第三节　空间方向的确定

3·1　用射线表示方向

当我们观察空间的一个目的物时，首先，观察者的眼睛和目的物必形成一条直线．如果以眼睛作为起点，则此直线就分成两条射线(半直线)．我们常用含有目的物的那条射线表示目的物关于观察者的方向(图 1-14)．故在空间几何里已知 A、P 两点，则以 A 为起点作射线，就用射线 AP 表示 P 点关于 A 点的方向．在一个坐标系 $Oxyz$ 中有一个现成的原点可作为起点，于是联原点及任意一点 P 所成的射线 OP 就表示 P 点关于 O 点的方向，简称为 P 点的方向．



图　1-14

平面内一点关于另一点的方向也可以用射线来表示．

3·2　方向余弦

在平面解析几何里，我们研究射线是利用了斜角和斜率(与 y 轴平行的射线无斜率)，但在空间解析几何里，则不能利用完全类似的方法．因而需要引进新的概念．

首先，我们规定空间两条异面射线 l_1 和 l_2 的夹角(图 1-15)．通常把一定点取作原点，分别作与 l_1、l_2 平行且同向的射线 m_1 和 m_2．因为 m_1 和 m_2 两条相交射线间的交角不是唯一确定的，它的角度可以是 θ，也可以是 $2\pi-\theta$．为确切起见，我们规定

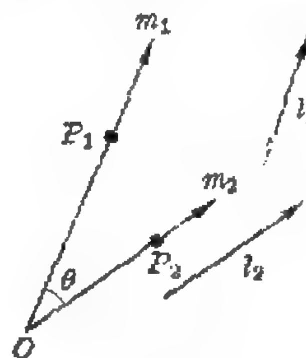


图　1-15

$0<\theta<\pi$. 特别是当两条射线平行时，根据它们同向或反向，我们规定它们的交角分别是 0 或 π. 综合上述就可以说：空间两条射线的夹角 θ 适合 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 于是就以相交射线 m_1 和 m_2 间的交角 $\theta(0<\theta<\pi)$ 作为异面射线 l_1 和 l_2 间的夹角. 至于空间两条相交射线的交角通常也以过原点和它们平行同向的两条相交射线的交角来度量.

注意 空间两条射线的夹角是无向角，它不分正角和负角，永远是正角.

为了研究射线，我们引进方向角和方向余弦两个概念. 如果射线 AB 和三条坐标轴正向的夹角分别是 α、β、γ $(0\leqslant\alpha,\beta;\ \gamma\leqslant\pi)$，则这三个角叫做射线 AB 的**方向角**（图 1-16），方向角的余弦叫做射线的**方向余弦**. 以后有时也用 λ、μ、ν 三个数来表示一条射线的方向余弦. 现在根据射线的一些特殊位置来讨论它们方向余弦的符号.

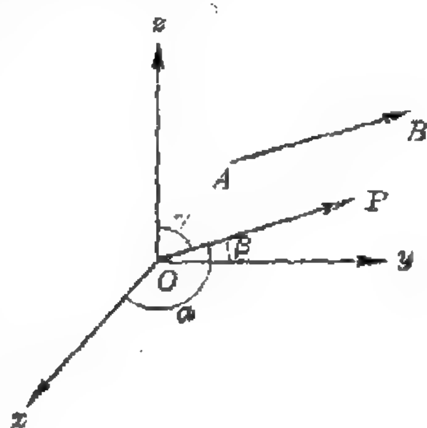


图 1-16

如果射线 AB 所在的直线穿过 xy 平面，根据它的方向向上或向下，则有 $\gamma<90°$ 或 $\gamma>90°$，也就是 $\cos\gamma>0$ 或 $\cos\gamma<0$.

如果射线 AB 位于和 xy 面平行的平面内，则 $\gamma=90°$，也就是 $\cos\gamma=0$. 再根据它的方向向前或向后，则有 $\alpha<90°$ 或 $\alpha>90°$，也就是 $\cos\alpha>0$ 或 $\cos\alpha<0$.

如果射线和 x 轴平行，则 $\beta=\gamma=90°$，也就是 $\cos\beta=\cos\gamma=0$，再根据它的方向和 x 轴同向或反向而有 $\alpha=0°$ 或 $180°$，也就是 $\cos\alpha=+1$ 或 $\cos\alpha=-1$.

由 3.1 段已经知道：空间一点的方向是用射线来表示.

下面来求射线的方向余弦和点的坐标间的关系. 设有一点 $P(x, y, z)$, 作射线 OP, 再经过 P 作与三坐标面平行的三个平面, 分别交坐标轴于 A、B、C, 则 $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$ (图 1-8). 为了明白易懂, 我们过 x 轴和 P 点作一个辅助平面. 在此平面内作 $\bar{y}$ 轴与 x 轴相垂直而建立平面直角坐标系 $Ox\bar{y}$. 注意, 这个 $\bar{y}$ 轴与 y 轴是不相同的. 在图 1-17(a) 中, α 是锐角, (b) 中 α 是钝角, 由三角公式

$$\cos\alpha=\frac{OA}{|OP|}.$$

但 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 故得 $\cos\alpha=x/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 同样可推出 $\cos\beta$, $\cos\gamma$. 从而得

定理 1 设有一点 $P(x, y, z)$, 则射线 OP 的方向余弦是

$$\begin{cases}\cos\alpha=x/\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\ \cos\beta=y/\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\ \cos\gamma=z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\end{cases}\tag{1}$$

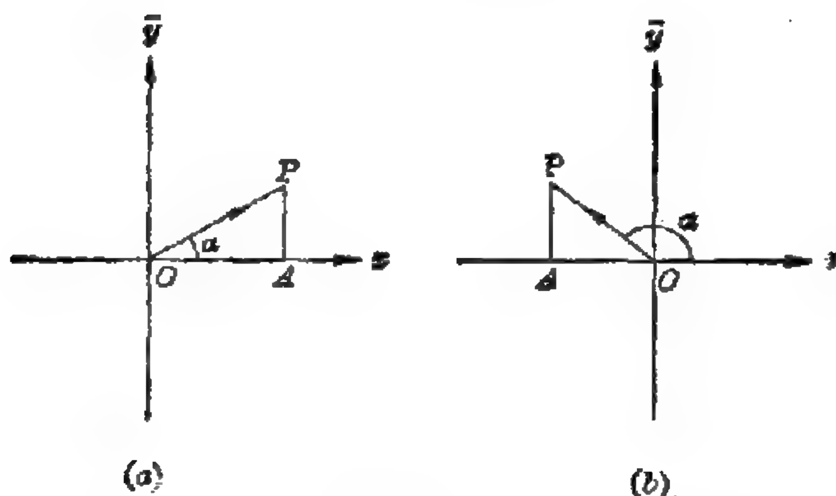


图 1-17

推论 设有一点 P, 且 $|OP|=1$, 则射线 OP 的方向余弦就分别是 P 的三个坐标.

设有两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则以 P_1 为新

原点，利用第二节公式(2)可知：P_2在新系下的坐标是$(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$。利用公式(1)可知：射线$P_1P_2$关于新系的方向余弦是

$$\begin{cases}\cos\alpha=(x_2-x_1)/\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},\\ \cos\beta=(y_2-y_1)/\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},\\ \cos\gamma=(z_2-z_1)/\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.\end{cases} \tag{2}$$

由于各新旧坐标轴对应平行，则射线P_1P_2关于旧系的方向余弦仍是(2)，故有

定理2 设有点$P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$，则射线P_1P_2的方向余弦是(2)。

在定理1和定理2中如果将(1)或(2)中三式平方相加，则有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{3}$$

于是得到

定理3 任一射线的方向余弦的平方和必等于1.

这个定理说明任一射线的方向余弦中的三个数不是独立的，它们必须适合关系式(3)。

定理3的逆命题也成立，现在证明如下：设λ, μ, ν是一个三元数组，适合关系式

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1.$$

于是取一点$Q(\lambda, \mu, \nu)$，根据公式(1)，射线OQ的方向余弦为

$$\cos\alpha=\lambda/\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}=\lambda/\sqrt{1}=\lambda,\ \cos\beta=\mu,\ \cos\gamma=\nu.$$

于是可得

定理4 如果一个三元数组中三个数的平方和等于1，则它们必可以作为一条射线的方向余弦.

将定理 3 和定理 4 合并起来，可以说：一个三元数组中的三个数，可以作为一条射线的方向余弦的充要条件是：它们的平方和等于 1.

例如：$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0^2=1$，这就是说：$\frac{\sqrt{2}}{2}$、$-\frac{\sqrt{2}}{2}$、0 可以作为一条射线的方向余弦，且方向角是 $\alpha=45°$，$\beta=135°$，$\gamma=90°$. 又如：$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\neq 1$，则 $\frac{1}{2}$、$\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 就不能作为一条射线的方向余弦.

【例 1】 如果一条射线的方向余弦都相等，试求它的方向角.

解：已知 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$，则由公式(3)，得

$$3\cos^2\alpha=1,\quad 即\quad \cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

从而得 $$\alpha=54°44' \quad 或 \quad 135°6'.$$

这就是说：三个方向角都是 54°44′ 或 135°6′.

*【例 2】 在三条坐标轴上分别取三个定点 A、B、C，且 $OA=a>0$，$OB=b>0$，$OC=c>0$，试求 $\triangle ABC$ 的面积.

解：利用立体几何三垂线定理，先证明下面一个性质："从一点到两个相交平面作垂线，则它们的交角等于两个平面所成的两个二面角中的一个." 然后从原点到 $\triangle ABC$ 所在的平面 π 作垂线，且设垂足是 D. 假定射线 OD 的方向角是 α, β, γ. 显然，C 点在 xy 面上的射影是 O. 于是 $\triangle ABC$ 在 xy 面上的射影是 $\triangle ABO$. 根据上面所证的性质，π 与 xy 面所成的二面角是 γ. 再由三角形的面积与它的射影[注1]所形成的三角形的面积的关系[注2]，得

[注 1] 图形的射影有两种解释：一种是指几何形，另一种是指几何形的量数. 本书按第一种解释.

[注 2] 由中学立体几何我们可以证明：三角形在一个平面上的射影所成三角形的面积等于原三角形的面积与这两个三角形所在半平面的二面角的余弦的乘积.

$$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\gamma,\ \text{即}\quad \frac{1}{2}ab=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\gamma.$$

同理可得 $\quad \frac{1}{2}bc=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\alpha,\ \frac{1}{2}ca=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\beta.$

将此三式平方相加后，得

$$\frac{1}{4}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)=(S_{\triangle ABC})^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma).$$

利用公式(3)，即得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}.$$

3·3 方向数

如果一条射线的方向余弦是 λ、μ、ν，则与 λ、μ、ν 成比例的三个数 a、b、c 叫做这条射线所在直线的一组方向数. 这个关系可用下面三个形式中的一个来表示：

$$a:b:c=\lambda:\mu:\nu; \tag{4}$$

$$a/\lambda=b/\mu=c/\nu; \tag{5}$$

$$a=k\lambda,\ b=k\mu,\ c=k\nu. \tag{6}$$

这里 k 是不等于零的数，也就是它们的公共比值. 显然，(5)式是以比例的形式来表示的，我们约定：当分母是零时不要理解为“以零作除数”，而应理解为相对应的分子是零. 例如：

$$\frac{\lambda}{0}=\frac{\mu}{1}=\frac{\nu}{2}\quad \text{即指}\quad \lambda=0,\ \frac{\mu}{1}=\frac{\gamma}{2}.$$

由于 0, 0, 0 不能作为一条射线的方向余弦，故

$$\frac{\lambda}{0}=\frac{\mu}{0}=\frac{\nu}{0}$$

是没有意义的.

下面的定理给出求一条直线的方向数的一种方法.

定理 5 设有一点 $P(x, y, z)$，则 P 点的坐标 x, y, z 就是直线 OP 的一组方向数.

【证】 由公式(1)可知，射线 OP 的方向余弦适合关系

$$x/\cos\alpha=y/\cos\beta=z/\cos\gamma=|OP|.$$

因此坐标 x、y 和 z 就是直线 OP 的一组方向数. ▌

定理 6 设有两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，则 x_2-x_1、y_2-y_1 和 z_2-z_1 就是直线 P_1P_2 的一组方向数.

这定理的证明与定理 5 相同，作为习题，留待读者自证.

当一条直线的方向数已知时，下面的定理指出了怎样推求它所决定的两条射线的方向余弦.

定理 7 如果三个不都是零的数 a、b、c 是一条直线的一组方向数，则它可以决定两组方向余弦：

$$\begin{aligned}&\cos\alpha=a/\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2},\ \cos\beta=b/\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2},\\&\cos\gamma=c/\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}\quad(\varepsilon=\pm1).\end{aligned}\tag{7}$$

【证】 由公式(6)：

$$a=k\cos\alpha,\ b=k\cos\beta,\ c=k\cos\gamma.$$

现在来确定公共比值 k. 将此三式平方相加并利用公式(3)可得：

$$a^2+b^2+c^2=k^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=k^2,$$

两端开方即得：

$$k=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

由假设 $a^2+b^2+c^2\neq0$，故得(7)式. ▌

现在对上述的重要结果加以讨论：以任意三个不都是零的数 a、b、c 作为方向数，可以决定两条射线. 在公式(7)中如果取 $\varepsilon=1$，则这条射线就是原点和 $P(a, b, c)$ 所成的射线 OP；如果取 $\varepsilon=-1$，则这条射线就是原点和 $Q(-a, -b, -c)$ 所成的射线 OQ，OP 和 OQ 正好是方向相反的两条射线.

在方向数 a、b、c 中如果 $a=0$，即 $\cos\alpha=0$，则这条直线垂直于 x 轴；同样，如果 $b=0$，则这条直线垂直于 y 轴；如果

$c=0$，则这条直线垂直于 z 轴.

在方向数 a、b、c 中，如果 $b=c=0$，则这条直线同时垂直于 y 轴和 z 轴，故必和 x 轴平行. 同样，如果 $c=a=0$，则这条直线必和 y 轴平行；如果 $a=b=0$，则这条直线必和 z 轴平行.

【例 3】 设一条直线的方向数是 k，$2k$，$3k(k\neq 0)$. 求由它所决定的射线的方向余弦.

解：由于 $\sqrt{k^2+(2k)^2+(3k)^2}=\varepsilon k\sqrt{14}$，由公式(7)得：

$$\cos\alpha=k/\varepsilon k\sqrt{14}=\sqrt{14}/\varepsilon(14),\quad \cos\beta=2\sqrt{14}/\varepsilon(14),$$

$$\cos\gamma=3\sqrt{14}/\varepsilon(14),\quad \text{式中}\quad \varepsilon=\pm 1.$$

这个结果说明了：不论 k 是不等于零的什么数，射线的方向余弦都是这两组中的一组，同时也说明了：这些点 $(k, 2k, 3k)$ 都在过原点的一条直线上.

习 题 1·3

1. 求证一条射线的三个方向角 α，β，γ 适合关系式：

   (1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$；

   (2) $\cos^2\beta+\cos^2\gamma\leqslant 1$；

   (3) $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma=\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\beta\cdot\mathrm{tg}^2\gamma-2$.

   [提示：都化成余弦函数.]

2. 已知两点 $P(2, 3, -6)$ 和 $Q(3, -4, 5)$，求射线 OP、PO、PQ 的方向余弦.

3. 如果一条直线的方向数是 -3，-5，-1，求方向余弦.

4. 如果一条射线的两个方向角都是 $60°$，求第三个方向角.

5. 在下列三元数组中，哪些可以作为一条射线的方向余弦？

   (1) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$；　　(2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$；

   (3) $\frac{5}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$；　　(4) $\frac{2}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{3}{7}$.

6. 在下列角所成的三元组中，哪些可以作为一条射线的方向角?

(1) $30°, 45°, 60°$; (2) $30°, 90°, 120°$;

(3) $90°, 0°, 270°$; (4) $90°, 135°, 45°$.

7. 如果射线 OP 在上半空间内，且它的方向角 $\alpha=45°$, $\beta=45°$, 又 $OP=6$. 试求 P 的坐标和方向角 γ.

8. 求 $+x$ 轴，$-x$ 轴; $+y$ 轴，$-y$ 轴; $+z$ 轴，$-z$ 轴的方向余弦.

9. 如果一条射线的方向余弦适合 (1)$\cos\gamma=\cos\alpha=0$; (2)$\cos\beta=0$, 则它的位置怎样?

10. 求过原点位于各半空间内的射线（与坐标轴不平行）的方向余弦的符号.

11. 求过原点位于各卦限内的射线（与坐标轴不平行）的方向余弦的符号.

*12. 如果一条射线的方向角是 $\theta, 2\theta, 3\theta$. 求证这条射线必位于三个坐标面中的一个平面内.

[提示: 用和差化积公式.]

第四节　空间两方向间的角度

4·1　两条射线的夹角

在第三节图 1-15 中，我们知道: 两条异面射线 l_1 和 l_2 的夹角就是过原点和它们平行且同向的射线 m_1 和 m_2 的交角 $\theta(0<\theta<\pi)$. 因为 m_1 和 m_2 可以分别由它上面的两点 P_1 和 P_2 与原点来决定，因而也可以说: θ 是 P_1 和 P_2 所定的两个方向间的交角. 现在就来推求 θ 的计算公式.

设 l_1 和 l_2 也即 m_1 和 m_2 的方向余弦分别是 λ_1, μ_1, ν_1 和 λ_2, μ_2, ν_2. 又设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 且假定

$$|OP_1|=\rho_1,\ |OP_2|=\rho_2,\ |P_1P_2|=d.$$

在 $\triangle OP_1P_2$ 中，利用余弦定理，就有

$$\cos\theta=(\rho_1^2+\rho_2^2-d^2)/2\rho_1\rho_2. \tag{A}$$

但由距离公式：

$$
\begin{cases}
\rho_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2, \ \rho_2^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2, \\
d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,
\end{cases}
\tag{B}
$$

又由第三节公式(1)，得

$$
\begin{cases}
x_1=\rho_1\lambda_1, \ y_1=\rho_1\mu_1, \ z_1=\rho_1\nu_1; \\
x_2=\rho_2\lambda_2, \ y_2=\rho_2\mu_2, \ z_2=\rho_2\nu_2.
\end{cases}
\tag{C}
$$

将(C)代入(B)，得

$$
\rho_1^2+\rho_2^2-d^2=2\rho_1\rho_2(\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2). \tag{D}
$$

将(D)代入(A)，得

$$
\cos\theta=\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2. \tag{1}
$$

由此可得：

定理1 设两条射线的方向余弦分别是 λ_1, μ_1, ν_1 和 λ_2, μ_2, ν_2，又它们的夹角是 θ，则

$$
\cos\theta=\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2.
$$

推论

$$
\sin\theta=\sqrt{(\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1)^2+(\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1)^2+(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)^2}. \tag{2}
$$

【证】 由第三节公式(3)得：

$$
\lambda_1^2+\mu_1^2+\gamma_1^2=\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2=1.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta=1-\cos^2\theta&=(\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2)(\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2) \\
&\quad-(\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2)^2 \\
&=(\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1)^2+(\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1)^2 \\
&\quad+(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)^2.
\end{aligned}
$$

由于 $0<\theta<\pi$，$\sin\theta>0$，开方后即得(2)式. 】

定理2 设有两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，又射线 OP_1 和 OP_2 的交角是 θ，则

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (3)$$

【证】 将前面(B)中的 ρ_1 和 ρ_2 代入 (C) 式，再推求 λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2, 将所得的值代入(1)式，即得出(3)式. 】

推论

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (4)$$

【证】

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2}{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}},$$

通分配方即得证. 】

如果已知两条直线的方向数是 a_1, b_1, c_1 和 a_2, b_2, c_2, 则它们的方向余弦将是:

$$\begin{cases}\lambda_1=a_1/\varepsilon_1\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}, & \mu_1=b_1/\varepsilon_1\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2},\\ \nu_1=c_1/\varepsilon_1\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}; & \lambda_2=a_2/\varepsilon_2\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2},\\ \mu_2=b_2/\varepsilon_2\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}, & \nu_2=c_2/\varepsilon_2\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\end{cases} \qquad (E)$$

(式中 $\varepsilon_1=\pm1$, $\varepsilon_2=\pm1$).

由于一组方向数决定两条方向相反的射线，故所决定的射线共有四条，它们形成两个互补的交角 θ 和 $\pi-\theta$ (图 1-18). 而这两个角的余弦是等值反号的，将(E)代入(1)式即可推出:

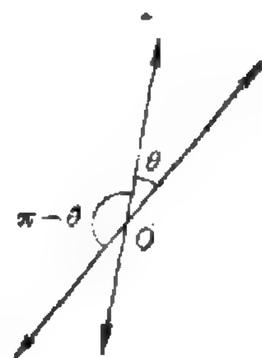


图 1-18

定理 3 以 a_1, b_1, c_1 和 a_2, b_2, c_2 为方向数的两条直线所成的一个交角是 θ, 则有

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\varepsilon\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \quad (\varepsilon=\pm1), \qquad (5)$$

且根据 θ 是锐角或钝角以定 ε 的值.

推论

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}. \tag{6}$$

4·2 两条射线垂直的充要条件

定理 4 设两条射线的方向余弦分别是 λ_1, μ_1, ν_1 和 λ_2, μ_2, ν_2, 则它们垂直的充要条件是

$$\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0. \tag{7}$$

【证】 由于两条射线垂直, 故 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 又 $0<\theta<\pi$, 故得 $\cos\theta=0$, 代入公式(1), 即得(7). 】

定理 5 以 a_1, b_1, c_1 和 a_2, b_2, c_2 为方向数的两条直线垂直的充要条件是

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0. \tag{8}$$

证明与定理 4 完全相同, 作为习题留给读者自证.

推论 设有两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则射线 OP_1 和 OP_2 垂直的充要条件是

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \tag{9}$$

这可由第三节定理 5 直接推出.

4·3 两条射线平行的充要条件

我们知道, 如果两条射线平行同向, 则它们的对应方向角必相同, 对应方向余弦必相等; 如果平行反向, 则它们的对应方向角互补, 对应方向余弦是等值反号, 反之也成立. 如在图 1-19 中, AB 和 CD 平行反向, 且第一个方向角分别是 α 和 $\pi-\alpha$, 于是对应的方向余弦分别是 $\cos\alpha$ 和 $-\cos\alpha$, 它们等值反号. 其它两个也可同样作出. 于是即有:

定理6 两条射线平行且同向的充要条件是对应的方向余弦相等；平行且反向的充要条件是对应的方向余弦等值反号.

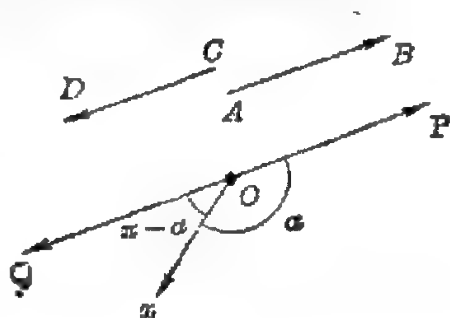


图 1-19

定理7 以 a_1, b_1, c_1 和 a_2, b_2, c_2 为方向数的两条直线平行的充要条件是

$$a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2. \quad (10)$$

【证】 1. 必要条件 两条直线平行同向或平行反向. 由定理 6 可知: 它们的方向余弦 λ_1, μ_1, ν_1 和 λ_2, μ_2, ν_2 必适合

$$\lambda_1=\varepsilon\lambda_2,\ \mu_1=\varepsilon\mu_2,\ \nu_1=\varepsilon\nu_2 \quad (\varepsilon=\pm1). \qquad (F)$$

利用第三节(7), 得

$$\lambda_1=a_1/\varepsilon_1\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \quad (\varepsilon_1=\pm1);$$

$$\lambda_2=a_2/\varepsilon_2\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \quad (\varepsilon_2=\pm1).$$

于是由(F)中第一式, 得

$$a_1/\varepsilon_1\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=\varepsilon a_2/\varepsilon_2\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2},$$

即有 $$a_1/a_2=\varepsilon\varepsilon_1\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}/\varepsilon_2\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}.$$

同理可推得:

$$b_1/b_2=c_1/c_2=\varepsilon\varepsilon_1\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}/\varepsilon_2\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2},$$

从而推得(10)式.

2. 充分条件 设(10)式成立, 且设公共比值是 k, 则

$$a_1=ka_2,\ b_1=kb_2,\ c_1=kc_2. \qquad (G)$$

从而:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=\sqrt{k^2(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}=\varepsilon k\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}.$$

当 k 为正数时, $\varepsilon=+1$; 当 k 为负数时, $\varepsilon=-1$. 于是

$$k=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}/\varepsilon\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2},$$

将 k 代入(G), 即得

$$a_1/\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=a_2/\varepsilon\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2},$$

$$b_1/\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=b_2/\varepsilon\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2},$$
$$c_1/\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=c_2/\varepsilon\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}.$$

即得

$$\lambda_1=\varepsilon\lambda_2,\ \mu_1=\varepsilon\mu_2,\ \nu_1=\varepsilon\nu_2.$$

故知这两条直线平行. 】

【例 1】 设有三个点 $P(1,2,k)$, $Q(2,2,2)$, $R(3,4,5)$.

(1) 求射线 OP 和 QR 的夹角.

(2) 如果它们垂直,则 k 的值是什么?

(3) 如果它们平行,则 k 的值是什么?

解: 由第三节公式(1)知: OP 的方向余弦是 $1/\sqrt{5+k^2}$, $2/\sqrt{5+k^2}$, $k/\sqrt{5+k^2}$. 由第三节公式(2)知: QR 的方向余弦是 $1/\sqrt{14}$, $2/\sqrt{14}$, $3/\sqrt{14}$.

(1) 由本节公式(1)可得

$$\cos\theta=\frac{1\times1+2\times2+3\times k}{\sqrt{14(5+k^2)}}=\frac{5+3k}{\sqrt{14(5+k^2)}},$$
$$\theta=\arccos\left(\frac{5+3k}{\sqrt{14(5+k^2)}}\right).$$

(2) 如果 OP 和 QR 垂直,则由本节公式(7),有

$$(5+3k)/\sqrt{14(5+k^2)}=0,$$

从而得
$$k=-\frac{5}{3}.$$

(3) 如果 OP 与 QR 平行同向,则由定理 6, 可得

$$1/\sqrt{5+k^2}=1/\sqrt{14},$$
$$2/\sqrt{5+k^2}=2/\sqrt{14},$$
$$k/\sqrt{5+k^2}=3/\sqrt{14}.$$

这是三个以 k 为未知数的方程,它们的公解 $k=3$ 即为所求.

又射线 OP 与 QR 平行反向时,则有

$$1/\sqrt{5+k^2}=-1/\sqrt{14},$$
$$2/\sqrt{5+k^2}=-2/\sqrt{14},$$
$$k/\sqrt{5+k^2}=-3/\sqrt{14}.$$

此三个方程没有公解，故 k 值不存在.

【例 2】 求证 $A(2, 3, 0)$、$B(4, 5, -1)$、$C(3, 7, 1)$ 和 $D(1, 5, 2)$是一个正方形的顶点.

【证】 由第三节定理6, 得 AB, BC, CD, DA 的一组方向数分别是 2, 2, −1; −1, 2, 2; −2, −2, 1; +1, −2, −2. 由于 AB 和 CD 以及 BC 和 DA 的对应方向数成比例，由本节定理 7 可知：$AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$. 因此 $ABCD$ 是平行四边形. 又 AB 和 BC 的对应方向数乘积之和是零，由本节定理 5 可知 $\angle B$ 是直角. 因此 $ABCD$ 是矩形. 又$|AB|=|BC|=3$, 故知 $ABCD$ 是正方形. ▌

*【例 3】 已知一个长方体，推求四条对角线中每两条的夹角.

解：从过底面一个顶点的三条棱所在的直线为坐标轴，而建立坐标系(如图 1-8). 于是已知长方体就是这个坐标系的坐标长方体. 假设长方体的三条棱的长度分别是$|OA|=a$, $|OB|=b$, $|OC|=c$,于是就可以写出它的八个顶点的坐标：

$O(0, 0, 0)$, $P(a, b, c)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, $L(0, b, c)$, $M(a, 0, c)$, $N(a, b, 0)$.

OP、AL、BM、CN 的一组方向数分别是 a、b、c; a、$-b$、$-c$; $-a$、b、$-c$; $-a$、$-b$、c. 今以 $\widehat{OP, AL}$ 表示 OP, AL 所夹的锐角，于是由公式(5)，得

$$\cos(\widehat{OP, AL})=|(a^2-b^2-c^2)/(a^2+b^2+c^2)|.$$

即 $\widehat{OP, AL}=\arccos k_1$，这里 $k_1=|(a^2-b^2-c^2)/(a^2+b^2+c^2)|$，而且 $0<\arccos k_1<\frac{\pi}{2}$. 同样，可以推出

$$\widehat{OP, BM}=\arccos k_2, \quad \widehat{OP, CN}=\arccos k_3;$$

$\widehat{BM, CN}=\arccos k_1$,　$\widehat{CN, AL}=\arccos k_2$,　$\widehat{AL, BM}=\arccos k_3$;
这里 $k_2=|(-a^2+b^2-c^2)/(a^2+b^2+c^2)|$, $k_3=|(-a^2-b^2+c^2)/(a^2+b^2+c^2)|$, 且 $0<\arccos k_2$, $\arccos k_3<\pi/2$.

习　题　1·4

1. 已知以 $\sqrt{2}, -1, 1$ 和 $1, \sqrt{2}, -1$ 为方向数的两条直线，求它们的夹角。
2. 求证：(1)(−6, 3, 2), (3, −2, 4), (5, 7, 3)和(−13, 17, −1)是一个梯形的四个顶点；(2)(3, 7, 2), (4, 3, 1), (1, 6, 3) 和(2, 2, 2)是一个平行四边形的四个顶点。
3. 已知以 1, 1, 0 和 0, 1, −1 为方向数的两条直线 l_1 和 l_2. 求一条直线的一组方向数，使它和 l_1 垂直且和 l_2 的一个夹角是 30°.
4. 已知三个点 $A(2, 3, 5)$, $B(-1, 3, 2)$ 和 $C(3, 5, -2)$，利用方向数先证明它们的联线形成一个三角形，再求它的内角。
5. 利用方向数证明四个点(3, 2, 4), (4, 5, 2), (5, 8, 0)和(2, −1, 6)共线。
6. 求证以(0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, −1)和(1, 0, −1)为顶点的四面体的对棱相互垂直。

*7. 求证过原点而且方向数分别是 2, −1, 5; 3, 2, −4; 7, 0, 6, 的三条直线必共面.

[提示: 利用方向数证明这三条直线都和某条定射线垂直.]

8. 求证方向数为 3, 1, 2; 5, −4, 3; 1, 6, 1 的三条直线都和一个定平面平行.
9. 求一个立方体的两条对角线的夹角。

[提示: 仿照例 4 建立一个坐标系.]

*10. 如果一条射线和一个立方体的四条对角线的夹角是 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 和 θ_4, 求证:

$$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3+\cos^2\theta_4=\text{常数}.$$

[提示: 建立适当的坐标系，如果射线的方向余弦是 λ, μ, ν, 则 $\sum_{i=1}^{4}\cos^2\theta_i$ 将不含 λ, μ, ν.]

第五节　空间线段的定比分点

5·1　线段分比和分点的对应关系

在平面解析几何里，我们已经讨论过平面内线段的定比分点．现在将它推广到空间来讨论．

设 P_1 和 P_2 是空间的两个点，P 点内分或外分有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$．这两个线段的量数比叫做分比，记作 λ，即

$$\lambda = P_1P/PP_2. \tag{1}$$

过 P_1，P_2 和 P 作三个坐标面的平行平面，分别交三个坐标轴于 A_1，B_1，C_1；A_2，B_2，C_2 和 A，B，C．与平面解析几何完全一样，我们根据 λ 的各种数值就可以讨论 P_1，P_2 和 P 的相应位置．留作习题，读者试自行补上．

特别值得注意的是：$\lambda=1$ 时，P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的中点，反过来也成立．$\lambda=-1$ 时，则 P 不存在．

5·2　定比分点的坐标

已知两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 和分点 $P(x, y, z)$，且知分比 λ，于是：

$$OA_1=x_1,\ OB_1=y_1,\ OC_1=z_1;$$
$$OA_2=x_2,\ OB_2=y_2,\ OC_2=z_2;$$
$$OA=x,\quad OB=y,\quad OC=z.$$

由于三个平行平面被两条直线截成比例线段，故有

$$A_1A/AA_2=P_1P/PP_2=\lambda,$$

但 $$A_1A=x-x_1,\ AA_2=x_2-x,$$

所以有 $$(x-x_1)/(x_2-x)=\lambda,$$

即 $$x=(x_1+\lambda x_2)/(1+\lambda).$$

同理可得

$$y=(y_1+\lambda y_2)/(1+\lambda),\ z=(z_1+\lambda z_2)/(1+\lambda).$$

于是有

定理1 已知两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 和分点 $P(x, y, z)$，又知分比是 $\lambda(\lambda\neq-1)$，则

$$\begin{cases}x=(x_1+\lambda x_2)/(1+\lambda),\\ y=(y_1+\lambda y_2)/(1+\lambda),\\ z=(z_1+\lambda z_2)/(1+\lambda).\end{cases}\tag{2}$$

推论 $\overline{P_1P_2}$ 的中点坐标是

$$((x_1+x_2)/2,\ (y_1+y_2)/2,\ (z_1+z_2)/2).\tag{3}$$

【例1】 求以1:3内分或外分两点 $P_1(2, -3, 1)$ 和 $P_2(3, 4, -5)$ 所成线段的分点及中点的坐标.

解：将 $\lambda=1/3$ 代入公式(2)，即得内分点 $(9/4, -5/4, -1/2)$；将 $\lambda=-1/3$ 代入公式(2)，即得外分点 $(3/2, -13/2, 4)$。另由公式(3)，得中点 $(5/2, 1/2, -2)$。

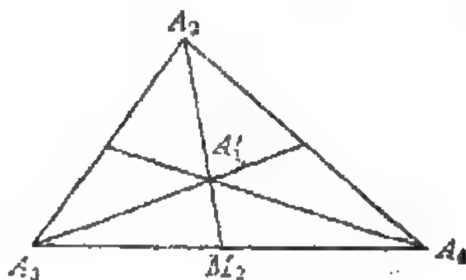


图 1-20

【例2】 已知一个四面体，(1)求证每个顶点和对面三角形的重心所联成的线段共点（此点叫四面体的重心），且此点分每个线段成3:1；(2)对棱中点所作的线段互相平分于一点，此点即四面体的重心.

【证】 设四面体的四个顶点是 $A_r(x_r, y_r, z_r)\ (r=1, 2, 3, 4)$。

(1) 设 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_1A_2A_3$ 的重心分别是 A_1', A_2', A_3', A_4'. 在图1-20中，$\triangle A_2A_3A_4$ 的重心是 A_1'. 又 A_3A_4 的中点 M_2 的坐标是 $((x_3+x_4)/2, (y_3+y_4)/2,$

$(z_3+z_4)/2)$，但 $|A_2A_1'|/|A_1'M_2|=2$，故得 $A_1'((x_2+x_3+x_4)/3, (y_2+y_3+y_4)/3, (z_2+z_3+z_4)/3)$，同理得 $A_2'((x_1+x_3+x_4)/3, (y_1+y_3+y_4)/3, (z_1+z_3+z_4)/3)$，$A_3'((x_1+x_2+x_4)/3, (y_1+y_2+y_4)/3, (z_1+z_2+z_4)/3)$ 和 $A_4'((x_1+x_2+x_3)/3, (y_1+y_2+y_3)/3, (z_1+z_2+z_3)/3)$. 在 A_1A_1' 上取 G_1，使 $|A_1G_1|/|G_1A_1'|=3$，于是有 $G_1((x_1+x_2+x_3+x_4)/4, (y_1+y_2+y_3+y_4)/4, (z_1+z_2+z_3+z_4)/4)$. 再在 A_2A_2'，A_3A_3' 及 A_4A_4' 上分别取 G_2，G_3，G_4，使

$$|A_2G_2|/|G_2A_2'|=3,\quad |A_3G_3|/|G_3A_3'|=3,\quad |A_4G_4|/|G_4A_4'|=3.$$

则 G_2，G_3，G_4 的坐标都和 G_1 的坐标相同，故 G_1，G_2，G_3，G_4 四点相重合. 即 A_1A_1'，A_2A_2'，A_3A_3' 和 A_4A_4' 共点于 G，且 G 分 A_1A_1'，A_2A_2'，A_3A_3' 和 A_4A_4' 成 3:1.

(2) 设 A_1A_2，A_3A_4；A_1A_3，A_2A_4；A_1A_4，A_2A_3 三对对棱的中点分别是 M_1，M_2；M_3，M_4；M_5，M_6. 再设 M_1M_2，M_3M_4，M_5M_6 的中点分别是 L，M，N. 于是得：$M_1((x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2, (z_1+z_2)/2)$，$M_2((x_3+x_4)/2, (y_3+y_4)/2, (z_3+z_4)/2)$，$L((x_1+x_2+x_3+x_4)/4, (y_1+y_2+y_3+y_4)/4, (z_1+z_2+z_3+z_4)/4)$，因此，$L$ 与重心 G 重合. 同样，M 和 N 也都与 G 重合，即得证明. 】

注意 要证几条线段共点时，首先证明某一个点在某一线段内，然后证明其余的线段都与该线段在这点相交. 这个证题方法非常有用.

*【例 3】 设有 n 个定点 $P_r(x_r, y_r, z_r)$ $(r=1, 2, \cdots, n)$. 且 $\overline{P_1P_2}$ 的中点是 G_1；$\overline{G_1P_3}$ 以 1:2 分于 G_2；$\overline{G_2P_4}$ 以 1:3 分于 G_3，以此类推. 求证 G_{n-1} 的坐标是 $\left(\frac{\sum_{r=1}^{n} x_r}{n}, \frac{\sum_{r=1}^{n} y_r}{n}, \frac{\sum_{r=1}^{n} z_r}{n}\right)$.

【证】 应用数学归纳法来证明:

(1) 当 $n=2$ 时,显然 $\overline{P_1P_2}$ 的中点 G_1 是 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

(2) $n=3$ 时,由

$$\frac{|G_1G_2|}{|G_2G_3|}=\frac{1}{2},$$

得
$$G_2\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3}{2}}{1+\frac{1}{2}}, \frac{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_3}{2}}{1+\frac{1}{2}}, \frac{\frac{z_1+z_2}{2}+\frac{z_3}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right),$$

即
$$G_2\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

(3) 设 $n=k$ 时公式成立, 也即由 k 个定点 $P_k(x_k, y_k, z_k)$ 建立 $G_{k-1}(x^{[k-1]}, y^{[k-1]}, z^{[k-1]})$. 而有关系

$$x^{[k-1]}=\frac{\sum_{r=1}^{k} x_r}{k}, \quad y^{[k-1]}=\frac{\sum_{r=1}^{k} y_r}{k}, \quad z^{[k-1]}=\frac{\sum_{r=1}^{k} z_r}{k}.$$

再将 $\overline{G_{k-1}P_{k+1}}$ 以 $1:k$ 分于 $G_k(x^{[k]}, y^{[k]}, z^{[k]})$, 即

$$\frac{|G_{k-1}G_k|}{|G_kP_{k+1}|}=\frac{1}{k},$$

于是得到:
$$x^{[k]}=\frac{\frac{\sum_{r=1}^{k} x_r}{k}+\frac{x_{k+1}}{k}}{1+\frac{1}{k}}=\frac{\sum_{r=1}^{k+1} x_r}{k+1}, \quad y^{[k]}=\frac{\sum_{r=1}^{k+1} y_r}{k+1},$$

$$z^{[k]}=\frac{\sum_{r=1}^{k+1} z_r}{k+1}.$$

因此, $n=k+1$ 时,公式也成立.

所以 n 为任何正整数时公式都成立. ∎

注意 这样的点叫 n 个定点的平均中心。

习 题 1·5

1. 求由(3, 2, −1)和(4, −2, 6)所联成的线段的中点和两个三等分点的坐标。

2. 已知$(2, -3, 1)$和$(3, 4, -5)$两个点及其所联成的线段上的一个分点$(5, 18, -17)$. 求分比.

3. 已知三角形的三个顶点是$(3, 6, -2)$, $(7, -4, 3)$和$(-1, 4, -7)$. 求重心.

4. 求证下列三点组共线, 且求第三个点分前两个点所成线段的分比.

(1) $(-3, 4, 2)$, $(7, -2, 6)$和$(2, 1, 4)$;

(2) $(4, 13, 3)$, $(3, 6, 4)$和$(2, -1, 5)$.

5. 已知一个平行四边形$ABCD$的三个顶点是$A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$. 求证第四个顶点D的坐标是$(x_A+x_C-x_B, y_A+y_C-y_B, z_A+z_C-z_B)$.

6. 已知四面体的四个顶点是$(a-b, a-c, a-d)$, $(b-c, b-d, b-a)$, $(c-d, c-a, c-b)$和$(d-a, d-b, d-c)$. 求证三对对棱的中点所联成的线段必定共点, 且此点为原点.

7. 已知空间六边形$P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, 而且六个三角形$P_1P_2P_3$, $P_2P_3P_4$, $P_3P_4P_5$, $P_4P_5P_6$, $P_6P_1P_2$的重心分别是Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6. 试证六边形$Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$的对边平行且相等.

8. 试证四面体的四个面的重心所形成的四面体与原来的四面体有相同的重心, 而且此重心也是六棱中点的平均中心.

9. 已知空间四边形, 试证: (1)四边的中点顺次相联必成一个平行四边形; (2)两对对边的中点联成两个线段, 这两个线段的中点又联成一个线段. 证明此线段的中点恰好是四个顶点的平均中心.

*10. 已知n个定点A_1, A_2, $\cdots$, A_n的平均中心是G, 又P和Q是两个任意点. 求证

$$\sum_{i=1}^{n}(PA_i^2-QA_i^2)=n(PG^2-QG^2).$$

本 章 提 要

1. 基本概念

(1) 右手系和左手系; (2) 空间坐标系;

(3) 半空间和卦限；

(4) 坐标系的平移；

(5) 射线表示方向；

(6) 射线的方向角和方向余弦；

(7) 直线的方向数；

(8) 有向线段的分比、分点。

2. 基本公式

(1) $P(x, y, z)$到三个坐标面的距离；

(2) $P(x, y, z)$到三个坐标轴的距离；

(3) 已知新原点在旧系下的坐标；在坐标系平移下新旧坐标的关系；

(4) 原点和$P(x, y, z)$的距离；

(5) $P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$两点的距离；

(6) 已知$P(x, y, z)$，射线OP的方向余弦；

(7) 已知$P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$，射线P_1P_2的方向余弦；

(8) 已知方向数$a, b, c\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$，可以决定两条射线的方向余弦；

(9) 已知两条射线的方向余弦是λ_1, μ_1, ν_1和λ_2, μ_2, ν_2，求它们的夹角；

(10) 以a_1, b_1, c_1和a_2, b_2, c_2为方向数的两条直线的夹角的求法；

(11) 已知两点$P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$，又知分比$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$，求分点的坐标；

(12) 已知两点$P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$，求$\overline{P_1P_2}$的中点的坐标.

3. 基本性质

(1) 点在半空间内或在卦限内的判定；

(2) 两点关于坐标面、坐标轴或原点对称的判定；

(3) 一个三元数组可以作为一条射线的方向余弦的判定；

(4) 一个三元数组可以作为一条直线的方向数的判定；

(5) 已知两条射线的方向余弦，它们方向相反的判定；

(6) 已知两条射线的方向余弦，它们互相垂直的判定；

(7) 已知两条射线的方向余弦，它们互相平行的判定；

(8) 已知两条直线的方向数，它们互相垂直的判定；

(9) 已知两条直线的方向数，它们互相平行的判定；

(10) 利用线段的分比，对分点位置的判定。

复习题一

1. 坐标适合于下列条件的点位于哪几个卦限内？

   (1) $yz>0$;　(2) $zx<0$;　(3) $xyz>0$;　(4) $xyz<0$.

2. 求证$(6, 7, 3)$，$(3, 11, 1)$，$(0, 3, 4)$和$(-3, 7, 2)$是一个矩形的四个顶点。

3. 求证$(6, -6, 0)$，$(3, -4, 4)$，$(2, -9, 2)$和$(-1, -7, 6)$是一个菱形的四个顶点。

4. 求证$(7, 2, 4)$，$(4, -4, 2)$，$(9, -1, 10)$和$(6, -7, 8)$是一个正方形的四个顶点。

5. 求证(a, b, c)，(b, c, a)和(c, a, b)是一个正三角形的三个顶点，并求重心坐标和三条中线的长度。

6. 设$a=t^2+3t+1$，$b=t^2-t-1$，$c=-t^2-t+1$，$d=-t^2-t-1$，这里t是参数。求证(a, b, c)，(b, c, a)，(c, a, b)和(d, d, d)是一个正四面体的四个顶点，且原点是它的重心。

*7. 求证$A(-1, 2, 2)$，$B(2, -1, 2)$，$C(2, 2, -1)$，$A'(1, -2, -2)$，$B'(-2, 1, -2)$和$C'(-2, -2, 1)$是一个正八面体的六个顶点且它的中心在原点。

   [提示：先证AA'，BB'，CC'等长，再证互相平分于原点，且它们两两垂直。]

8. 当三角形的两个顶点和重心为已知时，求证第三个顶点是唯一确定的。将此命题推广到四面体，并加证明。

9. 集合形式的表示法。我们把适合某个条件C的点$P(x, y, z)$的集合记作$\{P(x, y, z)|C\}$。说明下列集合所表示的图形。

   (1) $\{P(x, y, z)|y>0\}$;　(2) $\{P(x, y, z)|y\leqslant 0\}$;

   (3) $\{P(x, y, z)|y=0=z, x>0\}$;

   (4) $\{P(x, y, z)|y=0=z, x\leqslant 0\}$;

   (5) $\{P(x, y, z)|0<x<1, 0<y<1, 0<z<1\}$;

   (6) $\{P(x, y, z)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1\}$.

10. 求到两个定点 $\left(0, \frac{a}{2}, 0\right)$ 和 $\left(a, -\frac{a}{2}, a\right)$ 等距离的点的轨迹方程。

11. 求到两个定点的距离之比为常数的点的轨迹方程。

12. 设三角形的三个顶点是 $(x_r, y_r, z_r)(r=1, 2, 3)$。求到顶点的距离的平方和为常数 k^2 的点的轨迹方程。

13. 求到长方体的三个相邻面的距离的平方和为常数的点的轨迹方程。

14. 求到定点及不过定点的定平面的距离之比为常数的点的轨迹方程。

15. 求到定点及不过定点的定直线的距离之比为常数的点的轨迹方程。

16. 设有不在三坐标面上的两点 $P_1(a_1, b_1, c_1)$ 和 $P_2(a_2, b_2, c_2)$，如果它们的联线和三坐标面都相交，求三个交点分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比。

17. 已知点 P 到点 $A(0, 0, 12)$ 的距离是 7，且 OP 的方向余弦是 2/7, 3/7, 6/7。求 P 点的坐标。

18. 由第四节公式(1)推出：

$$4\cos^2\frac{\theta}{2}=(\lambda_1+\lambda_2)^2+(\mu_1+\mu_2)^2+(\nu_1+\nu_2)^2;$$

$$4\sin^2\frac{\theta}{2}=(\lambda_1-\lambda_2)^2+(\mu_1-\mu_2)^2+(\nu_1-\nu_2)^2.$$

19. 设有三条射线两两垂直，它们的方向余弦分别是 $\lambda_1, \mu_1, \nu_1; \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ 和 λ_3, μ_3, ν_3。求证以 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, $\mu_1+\mu_2+\mu_3$, $\nu_1+\nu_2+\nu_3$ 为方向数的直线当确定它的一个方向后必与这三条射线成等角。

20. 已知两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$。求证 $\overline{P_1P_2}$ 在方向余弦为 λ, μ, ν 的射线上的射影的长度是

$$|\lambda(x_2-x_1)+\mu(y_2-y_1)+\nu(z_2-z_1)|.$$

[提示：用射线夹角公式和线段射影定理：一个有向线段在另一条直线上的射影（成有向线段）的量数等于原线段的长度与这两线段的夹角的余弦的乘积。]

21. 已知两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$。求 $\angle P_1OP_2$ 的内、外平分角线的方向余弦。

[提示：设内、外平分角线与 $\overline{P_1P_2}$ 的交点分别是 P 和 Q，则[注1] $P_1P/PP_2=|OP_1|/|OP_2|$，$P_1Q/QP_2=-|OP_1|/|OP_2|$.]

*22. 设三条射线的方向余弦是 λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2 和 λ_3, μ_3, ν_3. 求证存在一条射线与它们都垂直的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}=0.$$

[提示：利用三元齐次方程组有非零解的充要条件[注2].]

*23. 已知射线 OP 的方向余弦是 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$，求射线 OP 在三坐标面上的射影的方向余弦。

[提示：利用 (x, y, z) 在三坐标面上的射影是 $L(0, y, z)$, $M(x, 0, z)$ 和 $N(x, y, 0)$.]

*24. 设 $P(x, y, z)$，又 $|OP|=l$，$\overline{OP}$ 在三坐标轴上的射影长度分别是 l_x, l_y 和 l_z；$\overline{OP}$ 在三坐标面上的射影的长度分别是 l_{yz}, l_{zx} 和 l_{xy}. 求证：(1) $l_x^2+l_y^2+l_z^2=l^2$；(2) $l_{yz}^2+l_{zx}^2+l_{xy}^2=2l^2$.

[提示：用线段射影公式.]

*25. 设有不共线的三点 $P_r(x_r, y_r, z_r)$ $(r=1, 2, 3)$. 求证：$\Delta P_1P_2P_3$ 的面积是 $\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}$. 这里

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & 1 \\ y_2 & y_3 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & 1 \\ y_3 & y_1 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

[提示：设原点到 $\triangle P_1P_2P_3$ 所在平面的垂线的方向余弦是 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$，再利用第三节例 2 去解.]

思 考 题 一

1. 设一条射线的方向角都是锐角，求证任意两角之和必大于第三角。
2. 如果 $a^2-ab+b^2=0$，求证：

[注1] 利用平面几何的一个定理：三角形内(外)平分角线必内(外)分对边成两线段与两邻边成比例.

[注2] 见本书附录第三节。

(1) 12 个点$(0,\ \pm a,\ \pm b)$, $(\pm b,\ 0,\ \pm a)$, $(\pm a,\ \pm b,\ 0)$是一个正二十面体的十二个顶点;

(2) 20 个点$[0,\ \pm b,\ \pm(a+b)]$, $[\pm(a+b),\ 0,\ \pm b]$, $[\pm b,\ \pm(a+b),\ 0]$, $[\pm a,\ \pm a,\ \pm a]$ 是一个正十二面体的二十个顶点.

3. 已知空间任意 5 个点,求证:

(1) 联结每一个点到其余四个点所成的四面体的重心的五条直线必共点;

(2) 联结每两个点的中点到其余三个点所成的三角形的重心的十条直线必共点;

(3) 上述的两个点必相重合.

进一步讨论将这问题推广到六个点、七个点的情况.

第二章

向 量 代 数

前面我们已经看到,不论在平面或在空间,对一些几何问题的解决,都是通过建立适当的坐标系,利用坐标的代数运算(在实数范围内)进行研究的. 这就是利用坐标法把几何与代数沟通了起来.

本章将介绍向量代数的基础知识. 在后面的一些章节中, 通过向量这个工具直接把代数运算(在向量范围内)引到几何中来, 这就是向量法. 利用向量法常常能够更简捷地解决一些问题,而且在建立坐标系后,向量和坐标又可以互相转换,这又为我们提供了很大的方便.

向量代数建立后, 就可以进一步研究向量分析. 它将为微分几何、力学、物理和工程技术提供有力的工具, 也为高等代数中的向量空间这一抽象的概念引进了一个具体模型.

第一节 数量和向量

1·1 两类量

在自然界中,我们遇到的量可以分为两类:其中一类较简单的量在取定测量单位后,就可以完全用一个实数来表示,例如物体的体积由它所含的单位立方数来确定; 温度由度数来确定; 电量由库仑来测量等等. 这种只具有大小的量叫做数量,数量可以是正量,也可以是负量,例如温度高于零度为正,低于零度则为负. 电量同样也有正负. 但是有些数量例如体

积、质量等等，则永远为正．但必须强调：不管单位是尺或是度，它们都是实数，因此就用普通字母表示数量．数量是代数量，对它们可以进行代数运算，如加、减、乘、除等，它们适合实数的运算律． 另外还有一类较复杂的量，它们不但有大小而且还有方向． 例如一个点的位移，就是指这个点沿一定方向移动一段距离，又比如只说"一个有5公斤的力"． 这种说法是不明确的，还必须指出此力的作用方向才算完整． 象位移和力这样的量是很多的，例如速度、加速度、力矩、电场等等．它们虽然具有不同的物理意义，但都是既有大小又有方向的量．于是就有必要把这些量的共同特点抽象出来作为统一研究的对象．我们将既有大小又有方向的量叫做**向量**或**矢量**（简称**矢**）．

1·2 向量的表示法

向量有两个特征，就是大小和方向，因此表示向量的工具应具备这两个要素方为合格．向量的方向是一个几何性质，在两个点 A 和 B 中，它反映点 B 对于另一点 A 的相关位置，可用 B 对于 A 的射线来表示．向量的大小是一个正数，它正好可用 A 和 B 两点间的距离来表示． 具备大小和方向的最简单的几何图形就是有向线段．因而向量就可以用有向线段来表示． 在选定一个测量单位后，线段的长度具有已知向量的大小，方向具有已知向量的方向． 为了避免与有向线段的记法相混淆，我们用带有箭头的线段来表示向量． 如图2–1中的 $\overrightarrow{AB}$ 就表示向量，且 A 叫做**始点**，B 叫做**终点**．在图2–2中以坐标系的原点为起点的向量 $\overrightarrow{OP}$，以后简记为 $\boldsymbol{P}$[注]， 即 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{P}$，以后向量就用大写粗体字母来表示．始点是原点的

［注］ 手写时可写为 $\vec{P}$．

向量 $\overrightarrow{OP}$ 可以说明 P 点的位置，叫做 P 点的位置向量(定位向量)或半径向量，它在以后研究几何问题时将起很大作用．容易看出：一点 P 和它的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 之间有一一对应的关系．有时也用小写粗体字母 $\boldsymbol{a}$[注]，$\boldsymbol{b}$，… 表示任意向量(如图 2-3)．总起来，向量有三种表示法，即 $\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{a}$．以后在不加特别声明的情况下，通常都按这种规定的表示法来表示向量．

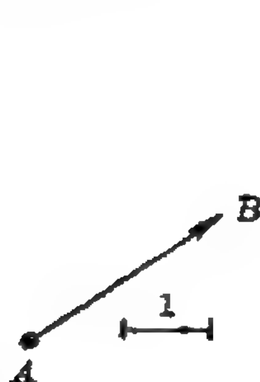


图 2-1

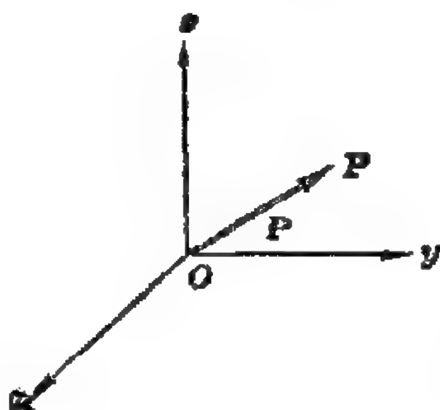


图 2-2



图 2-3

由于向量可以用有向线段来表示，我们有时也将向量的大小叫做向量的长度或绝对值，简称作模．向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度记作 $|\overrightarrow{AB}|$，向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度记为 $|\overrightarrow{OP}|$，有时也简记为 $|\boldsymbol{P}|$ 或 p，向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 a．

必须注意，向量的长度是正数，可以比较大小，能进行计算．但是，它的方向绝对不能比较大小，更不能进行计算．例如：两个位置向量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的长度分别是 3 和 4，也就是

$$|\boldsymbol{P}|=p=3, \quad |\boldsymbol{Q}|=q=4.$$

我们可以说 $p<q$，但是绝对不能说 $\boldsymbol{P}<\boldsymbol{Q}$．

【例 1】 判断在空间长度是 r（常数）的所有位置向量的终点形成什么图形？如果在 xy 面内则又怎样？

[注] 手写时可写为 $\vec{a}$．

解：这些点和原点的距离都是 r，在空间形成以原点为球心，r 为半径的一个球面。终点在 xy 面内则形成以原点为圆心，r 为半径的一个圆，而且这个圆是上述球面的一个大圆。

1·3 几种特殊向量

向量既然具有大小和方向两个要素，于是两个向量如果它们的两要素分别对应相同，则应看作是相等的。我们把长度相等、方向相同的两个向量叫做*相等向量*，如图 2-4 中，$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 就是相等向量。在向量代数中，相等的符号仍旧采用算术中的"＝"号，记作 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$。两个向量如果相等，则经过平移必可使一个与另一个相重合。反过来，一个向量经过平移得到另一个向量，则这两个向量必定相等。因此，任何向量都可经过平移得出位置向量。在图 2-5 中，两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 经平移分别得到位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$。

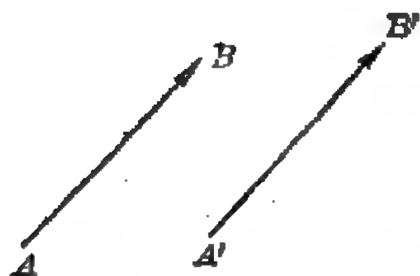


图 2-4

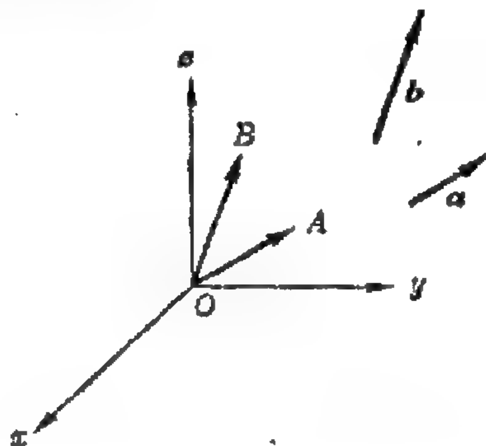


图 2-5

注意 在实际问题里，有些向量不能作平移，例如一个力，它的作用点只能沿着力的作用线而移动，但始点不能移向任意点。这种只能沿一直线移动的向量叫*滑动向量*。相对地，能平移到任意始点的向量叫*自由向量*。在几何里，所遇到

的向量都是自由向量，而且通常是把它们经过平移变成位置向量再进行研究。

两个向量如果长度相等，方向相反，则叫相反向量。如图 2-6 中 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 就是相反向量，记作

$$\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}.$$

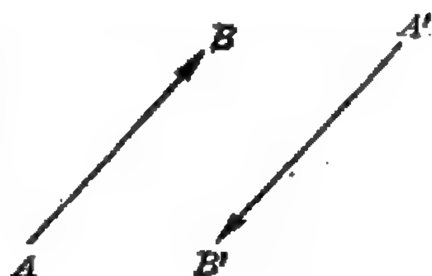


图 2-6

特殊情况，如果一个向量的长度是 1，则叫单位向量。如果一个向量的长度是 0，则叫零向量，记作 $\mathbf{0}$。显然，零向量的始点和它的终点是重合的，所以零向量并没有确定的方向，也可以说它的方向是任意的。我们规定：一切零向量都相等。

归纳起来，在特殊向量中，将长度和方向同时进行考虑的，有相等向量和相反向量；仅考虑长度的，有单位向量和零向量。

【例 2】 在图 1-8 的坐标长方体中，判断：(1)哪些棱可以作成相等向量？(2)哪些棱可以作成相反向量？

解：(1) 就 OA 来说：有相等向量

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{LP}=\overrightarrow{CM}.$$

(2) 就 OA 来说，因为有

$$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{NB},\quad \overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{PL},\quad \overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{MC},$$

故与 $\overrightarrow{OA}$ 相反的向量有 $\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{PL}$, $\overrightarrow{MC}$，此外，$\overrightarrow{BN}$ 与 $\overrightarrow{PL}$、$\overrightarrow{MC}$；$\overrightarrow{LP}$ 与 $\overrightarrow{MC}$ 等也都可以作成相反向量。

习 题 2·1

1. 作出长度为 $\sqrt{3}$，方向为北 15° 西的向量，再作出它的相反向量。
2. 如果 $ABCDEF$ 是一个正六边形，O 是它的中心，判断在向量组 (1)$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$；(2)$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$；(3)

$\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$ 中哪些是相等向量？哪些是相反向量？

3. 在一个平行四边形的边上可以作出几对相等向量？在一个平面内的正六边形的边上可以作出几对相等向量？在一个等边三角形的边上又怎样？
4. 求证：$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.
5. 在图 1-8 的坐标长方体的相对平面中，哪些对角线形成相等向量？哪些形成相反向量？

第二节　向 量 加 法

2·1　两个向量的加法

在力学里，作用于一个质点的两个力可以看作是两个位置向量，经过试验，它们的合力的大小和方向可用这两个向量为邻边作平行四边形的对角线向量来表示．对速度等向量也可以得到同样的结果．因此在数学上我们规定两个向量的加法如下：

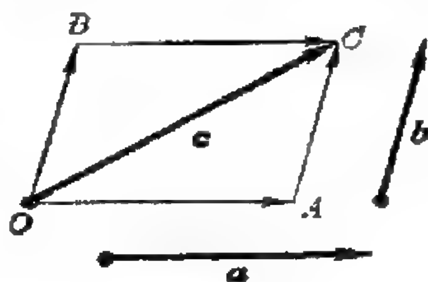


图 2-7

定义　以两个位置向量为邻边作一个平行四边形，则一条对角线上所作的位置向量就规定为它们的和，这种运算叫做向量的*加法*，我们把这种求和的方法叫做*平行四边形法则*．在图 2-7 中，已知两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，作它们的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$，则对角线上的位置向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和．运算符号仍旧采用算术中的"+"，记作

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}. \tag{1}$$

由于 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，故(1)式可以写作

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}. \tag{2}$$

从这就得出了求两个向量和的另一种方法：从第一个向量的

终点作第二个向量，于是以第一个向量的始点为始点，第二个向量的终点为终点的向量就是它们的和. 这种方法叫做三角形法则.

由三角形法则可以推出以下事实:

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\mathbf{0}, \tag{4}$$

$$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}. \tag{5}$$

设有两个同向的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，在图 2–8 中，我们得到它们的和 $\overrightarrow{OC}$ 的长度等于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的长度之和，方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 设有两个反向的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，当 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 时，在图 2–9(a) 中，可以得到它们的和 $\overrightarrow{OC}$ 的长度等于 $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$ 时，在图 2–9(b) 中能够得到它们的和 $\overrightarrow{OC}$ 的长度等于 $|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同.

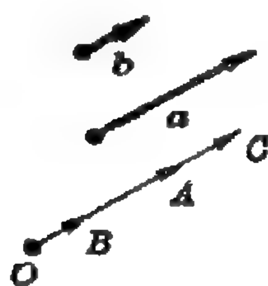
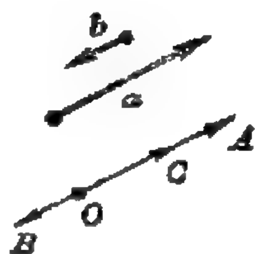
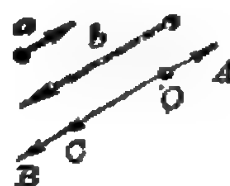


图 2-8



(a)



(b)

图 2-9

我们知道：三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，于是由图 2–7 中的 $\triangle OAC$ 能够得到

$$|OA|-|AC|<|OC|<|OA|+|AC|.$$

如果将 $|OA|$、$|AC|$ 和 $|OC|$ 分别看作是 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 的长度，上式就化成

$$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \tag{6}$$

这个式子叫做三角形不等式.

【例 1】 已知 $\triangle ABC$(图 2-10)，求证

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}.$$

【证】 由三角形法则

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA},$$

又
$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA},$$

将此两式相加得

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+(-\overrightarrow{BA}).$$

利用公式(4)即得证。



图 2-10

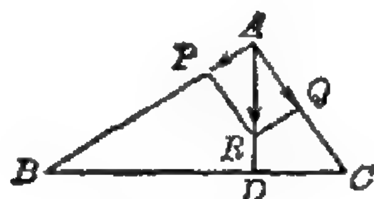


图 2-11

【例 2】 由图 2-11，从直角三角形的直角顶 A 作高线 AD，沿 AB 的力，其数值是 $|AB|^{-1}$，沿 AC 的力，其数值是 $|AC|^{-1}$，则其合力将沿 AD 且其数值为 $|AD|^{-1}$。

【证】 在图 2-11 中，设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$。题中沿 AB 的力是 $\overrightarrow{AP}$，沿 AC 的力是 $\overrightarrow{AQ}$。

所以 $|\overrightarrow{AP}|=\dfrac{1}{c}$，$|\overrightarrow{AQ}|=\dfrac{1}{b}$。又 $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ 的合力是 $\overrightarrow{AR}$，则由勾股定理，得

$$|\overrightarrow{AR}|=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{AQ}|^2}=\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{a}{bc}.$$

但
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}a\cdot|AD|,$$

所以
$$|\overrightarrow{AR}|=\frac{1}{|AD|}=|AD|^{-1}.$$

$$\operatorname{tg}\widehat{RAP}=\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AP}|}=\frac{c}{b}=\operatorname{tg}\widehat{ACB}=\operatorname{tg}\widehat{BAD},$$

故 $\overrightarrow{AR}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 相重合，因此合力 $\overrightarrow{AR}$ 将沿 AD，且其值是 $|AD|^{-1}$.]

2·2 运算律

在规定了向量加法以后，我们要证明与中学代数里实数加法相同的两个运算律也是成立的.

交换律 在图 2–7 中，先作 $\overrightarrow{OA}$，次作 $\overrightarrow{AC}$，其和是 $\overrightarrow{OC}$；先作 $\overrightarrow{OB}$，次作 $\overrightarrow{BC}$ 其和仍是 $\overrightarrow{OC}$. 此即证明了

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}. \tag{7}$$

故得

定理 1 向量加法适合交换律.

结合律 设有 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 三个向量. 在图 2–12 中先求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 得 $\boldsymbol{d}$，再求 $\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}$ 得 $\boldsymbol{r}$，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{r},$$

如果先求 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 得 $\boldsymbol{e}$，再求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}$ 仍得 $\boldsymbol{r}$，即

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{r}.$$

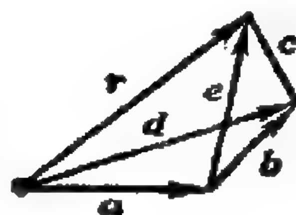


图 2-12

此即证明了

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}. \tag{8}$$

故得

定理 2 向量加法适合结合律.

2·3 多个向量的加法

由于三个向量的加法适合结合律(8)，我们说三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的加法是有意义的，如同三个实数的和一样，把 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 的和记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

【例 3】 试用平行六面体的三个棱所作成的向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 表示对角线向量 $\overrightarrow{OP}$(图 2-13).

解: 由于 $OANB$ 和 $ONPC$ 都是平行四边形, 故有

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} \quad 和 \quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OC}.$$

由此两式得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

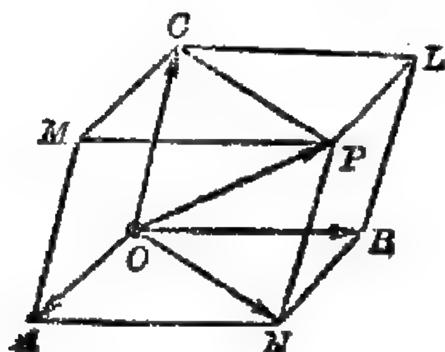


图 2-13

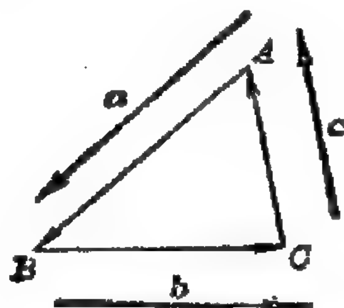


图 2-14

【例 4】 例 1 的逆命题是否成立?

解: 已知三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 适合 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 在图 2-14 中, 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 由例 1 得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$. 但一切零向量都相等, 即得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}.$$

两端加 $-\boldsymbol{a}$, 得

$$(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\overrightarrow{CA}$$

根据公式(4)和(3), 得

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\overrightarrow{CA}.$$

两端加 $-\boldsymbol{b}$, 再由公式(4)和(3), 得

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}.$$

于是得出: 三向量之和如果是零向量, 则其首尾相衔接必构成一个三角形, 也就是 $\boldsymbol{b}$ 的始点放在 $\boldsymbol{a}$ 的终点, $\boldsymbol{c}$ 的始点放在 $\boldsymbol{b}$ 的终点, 则 $\boldsymbol{c}$ 的终点恰是 $\boldsymbol{a}$ 的始点.

设有四个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$. 作多角形 $ABCDE$, 使 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{d}$(如图 2-15). 于是

$$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}]+\boldsymbol{d}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE},$$

$$[\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]+\boldsymbol{d}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE},$$

$$\boldsymbol{a}+[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}]=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE},$$

$$\boldsymbol{a}+[\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})]=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}.$$

可见四个向量不论按照什么顺序相加，结果都一样，于是把它们的和记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.

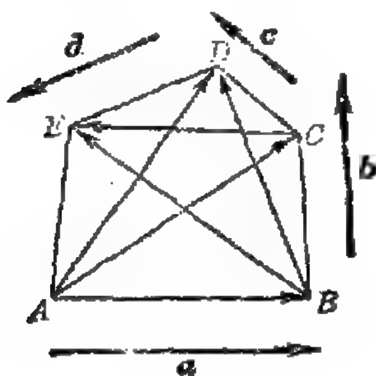


图 2-15

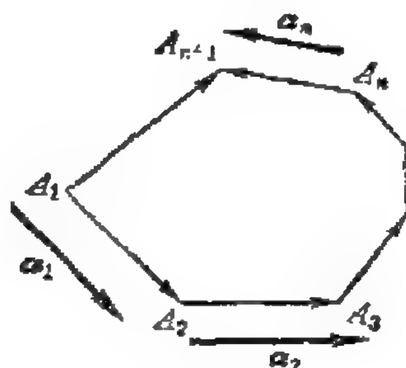


图 2-16

同样，可得 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 相加的多边形法则如下：

作多边形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$, 使 $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_1$, $\overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=\boldsymbol{a}_n$. 于是 $\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$ 就是这 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 的和，记作

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$$

(如图 2-16).

【例 5】 应用运算律证明:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}.$$

【证】 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{a}+[\boldsymbol{d}+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})]$（由四个向量的加法定义），

$=\boldsymbol{a}+[(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{d}]$（由交换律），

$=\boldsymbol{a}+[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}]$（由交换律），

$=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$（由四个向量的加法定义）．】

习 题 2·2

1．船向正北开，水向正西流；两小时后船已向北 15° 西行 36 海里，问船速和水速各多少？

2．如果两个力的合力与其中的一个力等值且直交，求另一个力．

3．在图 2–7 中，求 $\boldsymbol{C}$ 平分 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的交角的充要条件．

4．设 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 为正六边形，O 为它的中心．求证 $\sum_{\nu=1}^{6}\overrightarrow{OA_\nu}=0$．

5．已知三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$．作图验证向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 都相等．

6．应用运算律证明：$\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$．

7．已知四个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$．作图验证 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$．

*8．已知两个量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$，求下列各式成立的充要条件：

(1) $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；　　(2) $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

(3) $|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$．

[提示：参照图 2–8 和图 2–9．]

*9．求证三个向量之和的长度小于它们的长度的和．n 个向量的情况也如此．

[提示：用数学归纳法．]

*10．求四个向量之和是零向量的充要条件．

第三节　向 量 减 法

在中学代数里，若两个实数 b 及 c 的和是 a，则 c 叫做 a

与 b 的差．记作 $c=a-b$．将此概念推广，由向量的加法，我们规定向量的减法于下：

定义 两个向量的差是一个向量，它与所减向量的和就是被减向量，这种运算就叫向量的减法．

例如向量 $\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 的和等于 $\boldsymbol{a}$，于是 $\boldsymbol{c}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}. \tag{1}$$

在图 2-17 中，将 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$ 作出，则

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

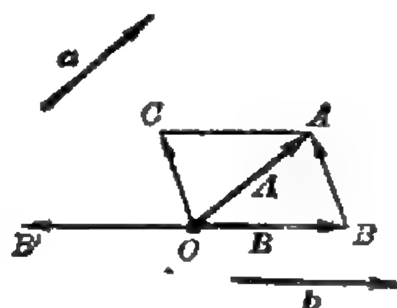


图 2-17

因此得减法法则如下：

由位置向量 $\boldsymbol{B}$ 的终点到位置向量 $\boldsymbol{A}$ 的终点作一向量 $\overrightarrow{BA}$，即得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．

仿照第二章第二节公式 (6) 关于减法也有三角形不等式成立：

$$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \tag{2}$$

证明留给读者作为练习．

在中学代数里，我们知道：从一个正数减去一个正数就等于该正数加上一个负数，在向量代数里，也可以推出类似的性质．在图 2-17 里延长 BO 到 B'，使 $BO=OB'$，则 $\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{b}$．

所以

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \tag{3}$$

故得

定理 1 减去一个向量就等于加上它的相反向量．

由这个定理可以推出向量等式的移项方法．在一个向量

等式中，将其中任意一项变号后，可以从等式一端移到另一端. 例如在向量等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 中，在两端都加上 $-\boldsymbol{c}$，则有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{d}+(-\boldsymbol{c})$，即得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$.

【例 1】 在第二章第二节例 3 中，求平行六面体的其它三条对角线向量和每个面上的对角线向量.

解：利用减法法则在图 2-13 中

$$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA},$$

同理

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{CN}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}.$$

在 $\square OCLB$ 中：

$$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}.$$

但 $OL \perp\!\!\!\!= AP$, $CB \perp\!\!\!\!= MN$. 故得

$$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}.$$

同理 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{NL}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA},$

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}.$$

【例 2】 已知四边形 $ABCD$. 求证

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}.$$

并说明这个关系的几何意义.

【证及解】 由

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$$
$$=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\Leftrightarrow\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}.\ 】$$

几何意义是：

四边形有一对对边平行且相等 ⇔ 四边形另一对对边平行且相等.

习 题 2·3

1. 设 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{a}$. 求 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$.

2. 已知两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. 作图验证

(1) $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;　　　(2) $-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

3. 设 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 是一个正六边形，如果

(1) $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{A_1A_2}$, $\boldsymbol{q}=\overrightarrow{A_1A_6}$;　　　(2) $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{A_1A_3}$, $\boldsymbol{q}=\overrightarrow{A_4A_6}$,

判断能不能以 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$ 表出 $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\cdots$, $\overrightarrow{A_6A_1}$?

4. 补证本节三角形不等式(2).

5. 已知两个点的位置向量，它们的夹角是 60°. 求它们的和及差的长度.

[提示：用三角形的余弦定理.]

*6. 证明当两个向量的夹角是钝角、锐角、直角时，它们的和的长度分别小于、大于、等于它们的差的长度.

[提示：利用平面几何或三角的知识.]

*7. 已知两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. 求下列各式成立的充要条件.

(1) $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;　　　(2) $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(3) $|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

[提示：利用 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.]

*8. 已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$. 求证 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的充要条件是：$\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 的方向垂直.

第四节　数与向量的乘法

4·1　数与向量的乘法

在中学代数里，我们知道：几个相等的实数相加便得到几倍实数的概念. 现在把这一概念推广到几个相等的向量相加上，于是得：

定义　n 个相等的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加后所得的和叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与正整数 n 的积，记作 $n\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}n$，即

$$n\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}n=\underbrace{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}}_{n\text{个}}. \tag{1}$$

这种运算叫做数与向量的乘法．显然有 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$．乘积 $n\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向．$n\boldsymbol{a}$ 的长度为 a 的 n 倍，即 n 为正整数时

$$|n\boldsymbol{a}|=na. \tag{2}$$

这里 $|\boldsymbol{a}|=a$.

将此概念推广，更有

定义 一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与一个正数 n 的积仍是一个向量，它的长度是原来长度的 n 倍，方向与 $\boldsymbol{a}$ 一致．记作 $n\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}n$.

公式(2)在此仍成立．

定义 一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与一个负数 n 的积就是 $(-n)\boldsymbol{a}$ 的反向量．仍记作 $n\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}n$.

显然，$n<0$ 时，

$$n\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}n=-[(-n)\boldsymbol{a}]. \tag{3}$$

且

$$|n\boldsymbol{a}|=(-n)a. \tag{4}$$

这里 $|\boldsymbol{a}|=a$.

推论 如果 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，m 是不等于零的实数，则 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}m$ 是一向量，它的长度 $|m\boldsymbol{a}|$ 是 $|m|a$，它的方向当 $m>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $m<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向．

定义 当 $m=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，则

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}m=\boldsymbol{0}. \tag{5}$$

由(3)式可见：$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$．即以 -1 乘以向量后，即得它的相反向量，这与中学代数里以 -1 乘以实数后，即得它的相反数一样．

有时将 $\frac{1}{p}\boldsymbol{a}$ 记作 $\frac{\boldsymbol{a}}{p}(p\neq 0)$.

为了以后运用方便起见，这里有

定义 与已知向量同向的单位向量叫做这个向量的单位

向量.

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量常以 $\boldsymbol{a}^\circ$ 来表示,而且有

$$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{a}^\circ \tag{6}$$

及

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{a}. \tag{7}$$

4·2 运算律

下面讨论结合律、分配律和消去律在数与向量的运算中的情况.

结合律 由于在此尚未给出关于两个向量相乘的定义,故在此讨论结合律时用到的三个因子中应假定两个是实数,一个是向量.

定理1 设 m, n 是两个实数, $\boldsymbol{a}$ 是向量,则

$$m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a}. \tag{8}$$

【证】 显然,当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 m, n 中至少有一个为零时,等式(8)是成立的. 因此只研究 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $m\neq 0$, $n\neq 0$ 的一般情况. 从上面推论得:

$$|m(n\boldsymbol{a})|=|m||n\boldsymbol{a}|=|m||n||\boldsymbol{a}|=|mn|a,$$

$$|mn(\boldsymbol{a})|=|mn|\boldsymbol{a}.$$

因此(8)式两端向量的长度相等. 至于要证明(8)的两端向量的方向相同,就应当区别四种情况,即 $m>0$, $n>0$; $m>0$, $n<0$; $m<0$, $n>0$; $m<0$, $n<0$. 在此仅证最后一种情况,其余的作为练习,留给读者补证. 由于 $n<0$, $n\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,又由 $m<0$, 则 $m(n\boldsymbol{a})$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;另一方面 $mn>0$, $(mn)\boldsymbol{a}$ 也和 $\boldsymbol{a}$ 同向. 由此即证明了它们的方向相同. ▌

分配律 由于因子不同(或者是数量,或者是向量),因而有两类不同的分配律.

定理2 第一类分配律 设 m, n 是两实数, $\boldsymbol{a}$ 是向量, 则有

$$(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}. \tag{9}$$

【证】 如同定理1一样,特殊情况显然成立,下面讨论一般情况. 就 m, n 可分四种情况: $m>0$, $n>0$; $m>0$, $n<0$; $m<0$, $n>0$; $m<0$, $n<0$. 现仅对 $m<0$, $n>0$ 这一种情况进行论证. 在此情况下又分成两类:

1. $m+n>0$, 即 $n>-m>0$:

$(m+n)\boldsymbol{a}$ 的长度是 $(m+n)|\boldsymbol{a}|$, 方向是 $\boldsymbol{a}$ 的方向. 另一方面 $m\boldsymbol{a}$ 的长度是 $-m|\boldsymbol{a}|$, $n\boldsymbol{a}$ 的长度是 $n|\boldsymbol{a}|$, 二者反向, 故 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$ 的长度是 $[n-(-m)]|\boldsymbol{a}|=(m+n)|\boldsymbol{a}|$, 方向则是 $m\boldsymbol{a}$, 即 $\boldsymbol{a}$ 的方向(图 2-9).

所以 $$(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}.$$

2. $m+n<0$, 即 $-m>n>0$:

$(m+n)\boldsymbol{a}$ 的长度是 $-(m+n)|\boldsymbol{a}|$, 方向是 $-\boldsymbol{a}$ 的方向. 另一方面, $m\boldsymbol{a}$ 的长度是 $-m\boldsymbol{a}$, $n\boldsymbol{a}$ 的长度是 $n|\boldsymbol{a}|$, 二者反向,故 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$ 的长度是 $[(-m)-n]|\boldsymbol{a}|=-(m+n)|\boldsymbol{a}|$,方向则是 $m\boldsymbol{a}$ 即 $-\boldsymbol{a}$ 的方向.

所以 $(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$. 】

推论 设 m_1, m_2, $\cdots$, m_k 是实数, $\boldsymbol{a}$ 是向量. 则

$$(m_1+m_2+\cdots+m_k)\boldsymbol{a}=m_1\boldsymbol{a}+m_2\boldsymbol{a}+\cdots+m_k\boldsymbol{a}. \tag{10}$$

定理3 第二类分配律 设 m 是实数, $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是向量. 则

$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}. \tag{11}$$

【证】 显然, 当 $m=0$ 或 $m=1$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为零向量时, 等式(11)成立. 因此只研究 $m\neq0$、$m\neq1$、$\boldsymbol{a}\neq0$、$\boldsymbol{b}\neq0$ 的一般情况.

1. $m>0(m\neq1)$:

在图 2-18 中，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB_0}=m\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{B_0C_0}=m\boldsymbol{b}$. 再作 AC，AC_0，则 $BC \parallel B_0C_0$，$\angle ABC=\angle AB_0C_0$，且

$$\frac{AB_0}{AB}=\frac{B_0C_0}{BC}=m,$$

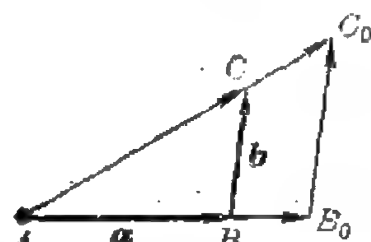


图 2-18

所以 $\triangle ABC \sim \triangle AB_0C_0$，故 $\dfrac{AC_0}{AC}=m$，且 $\angle C_0AB_0=\angle CAB$，因此 A，C，C_0 在一直线上，即知 $m\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC_0}$.

所以
$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}.$$

2．$m<0$：作为练习，读者自证. ▌

推论 设 m 是实数，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_k$ 是向量，则

$$m(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_k)=m\boldsymbol{a}_1+m\boldsymbol{a}_2+\cdots+m\boldsymbol{a}_k. \tag{12}$$

消去律 在中学代数里，我们知道：若两数 a，b 适合 $ab=0$，则必有 $a=0$ 或 $b=0$. 在三数 a，b，c 中，如果 $ab=ac$，且 $a\neq 0$，则 $b=c$. 这种性质称为消去律. 对于数与向量的乘法也有类似的性质. 即

定理 4 (1) 如果实数 $m\neq 0$，且 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$，则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}. \tag{13}$$

(2) 如果 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，m，n 是实数，且 $m\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}$，则

$$m=n. \tag{14}$$

【证】 (1) 由 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$，则有 $\dfrac{1}{m}(m\boldsymbol{a})=\dfrac{1}{m}(m\boldsymbol{b})$，根据公式(8)得：$\dfrac{m}{m}\boldsymbol{a}=\dfrac{m}{m}\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

(2) 如果 $m=0$，则 $m\boldsymbol{a}=0$，但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $n=0$，即 $m=n$；如果 $m\neq 0$，则 $n\neq 0$，又 $m\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}$，所以 $|m\boldsymbol{a}|=|n\boldsymbol{a}|$，由题设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，故 $|m|=|n|$，另一方面 m 与 n 必同号，故得 $m=n$. ▌

到此我们介绍了向量的加法、减法以及数与向量的乘法，它们不但适合中学代数里的运算律，且有很多性质与实数性质完全相同．这三种运算总称为向量的线性运算也叫做向量的初等运算．

含有向量的等式我们叫做向量等式．有了向量的线性运算，就与中学代数完全相同，可以把向量等式变形，如将向量移项变号、去括弧以及化去分母(是实数)等等．例如有向量等式

$$\frac{\boldsymbol{A}}{3}-\left(\frac{\boldsymbol{B}}{4}+\frac{\boldsymbol{C}}{2}\right)=-\left(\frac{\boldsymbol{B}}{8}+\frac{\boldsymbol{C}}{2}\right)+\frac{\boldsymbol{A}}{6},$$

去括弧，得 $$\frac{\boldsymbol{A}}{3}-\frac{\boldsymbol{B}}{4}-\frac{\boldsymbol{C}}{2}=-\frac{\boldsymbol{B}}{8}-\frac{\boldsymbol{C}}{2}+\frac{\boldsymbol{A}}{6},$$

移项变号，得

$$\frac{\boldsymbol{A}}{3}-\frac{\boldsymbol{A}}{6}+\frac{\boldsymbol{C}}{2}-\frac{\boldsymbol{C}}{2}=\frac{\boldsymbol{B}}{4}-\frac{\boldsymbol{B}}{8},$$

通分，得 $$\frac{2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}}{6}=\frac{2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}}{8},$$

即 $$\frac{\boldsymbol{A}}{6}=\frac{\boldsymbol{B}}{8},$$

或 $$4\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{B}.$$

【例 1】 已知 $\triangle ABC$ 两边的向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$．求 BC 边上的中线向量 $\overrightarrow{AA'}$(图 2-19)．

解：延长 AA' 至 A_0，使 $A'A_0=AA'$，于是 ABA_0C 是一个平行四边形．从而知

$$\overrightarrow{AA_0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

或 $$2\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

于是得 $$\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})。$$

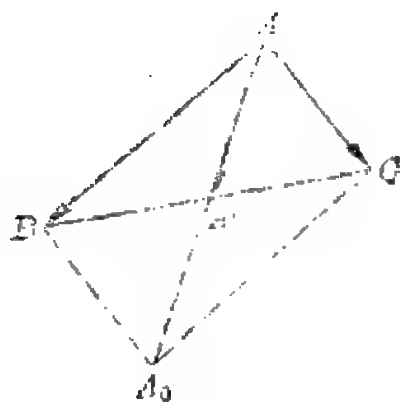


图 2·19

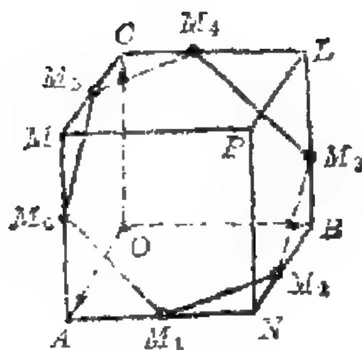


图 2·20

【例 2】 已知立方体 $OANB—CMPL$ 的三个棱上的向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$（图 2·20）．又 AN, NB, BL, LC, CM 和 MA 的中点分别是 M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 和 M_6．求证可作一个三角形，使它们的三个边分别与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_3M_4}$ 和 $\overrightarrow{M_5M_6}$ 相平行．

【证】 由数与向量乘积的定义可知

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}).$$

同理， $\overrightarrow{M_3M_4}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})$, $\overrightarrow{M_5M_6}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})$.

于是得： $$\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_3M_4}+\overrightarrow{M_5M_6}=\boldsymbol{0}.$$

由第二章第二节例 4 即得证．】

4·3 定比分点的位置向量

首先证明

定理 4 已知两个点 P_1 与 P_2 及分比 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$，则

$$\boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{P}_1+\lambda\boldsymbol{P}_2}{1+\lambda}. \tag{15}$$

【证】 不论 P 是内分点或外分点，也就是说，不论 $\lambda>0$

或 $\lambda<0$，总有 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$（图 2-21）. 即 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1=\lambda(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P})$，移项解出后，即得(15). ▌

注意 1. 公式(15)中当 λ 在实数范围内变化($\lambda\neq-1$)时，可以得出 P_1P_2 上所有点的位置向量. 这可以说直线上的点仅含有一个参数.

2. 公式(15)中 P_1 和 P_2 与 P 的位置向量的始点的取法无关. 在图 2-21 中，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$，$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P_1}$，$\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P_2}$（或者写作 $\boldsymbol{P}=\overrightarrow{OO'}+\boldsymbol{P}'$，$\boldsymbol{P}_1=\overrightarrow{OO'}+\boldsymbol{P}_1'$，$\boldsymbol{P}_2=\overrightarrow{OO'}+\boldsymbol{P}_2'$）. 于是(15)式即可写成

$$\overrightarrow{OO'}+\boldsymbol{P}'=\frac{\overrightarrow{OO'}(1+\lambda)+\boldsymbol{P}_1'+\lambda\boldsymbol{P}_2'}{1+\lambda}，\quad 即 \quad \boldsymbol{P}'=\frac{\boldsymbol{P}_1'+\lambda\boldsymbol{P}_2'}{1+\lambda}.$$

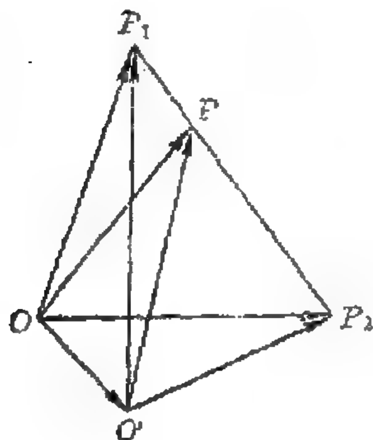


图 2-21

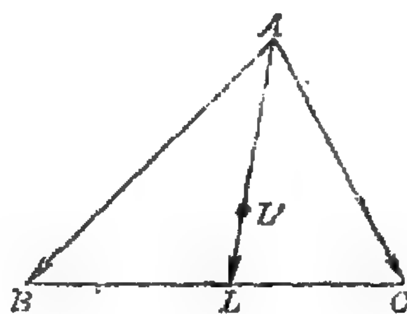


图 2-22

【例 3】 在 $\triangle ABC$ 中，作内平分角线 AL，已知 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$. 求 $\overrightarrow{AL}$ 和位于 AL 上的一个向量 $\overrightarrow{AL'}$.

解：由平面几何可得

$$BL:LC=AB:AC=c:b.$$

由公式(15)，得

$$\overrightarrow{AL}=\frac{\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b}\overrightarrow{AC}}{1+\frac{c}{b}}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}.$$

设 $\overrightarrow{AL}$ 的长度是 l，它的单位向量是 $\boldsymbol{L}^\circ$，则由 (6) 知：$\overrightarrow{AL}=l\boldsymbol{L}^\circ$。又 $\overrightarrow{AL'}$ 的长度是 λ，则 $\overrightarrow{AL'}=\lambda\boldsymbol{L}^\circ=\frac{\lambda}{l}(l\boldsymbol{L}^\circ)=\frac{\lambda}{l}\overrightarrow{AL}=\frac{\lambda}{l(b+c)}(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC})$。

【例 4】 用向量证明§1.5例2。

【证】 1. 在图1-20中，$\boldsymbol{M}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4)$，由于

$$\frac{|A_2A_1'|}{|A_1'M_2|}=2,$$

故得 $\boldsymbol{A}_1'=\frac{\boldsymbol{A}_2+2\boldsymbol{M}_2}{1+2}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}_2+2\boldsymbol{M}_2)$，将 $\boldsymbol{M}_2$ 代入，得 $\boldsymbol{A}_1'=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4)$。同理可得 $\boldsymbol{A}_2'=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4)$；$\boldsymbol{A}_3'=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_4)$；$\boldsymbol{A}_4'=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3)$。在 A_1A_1' 上取 G_1 使 $\frac{|A_1G_1|}{|G_1A_1'|}=3$，于是有 $\boldsymbol{G}_1=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4)$。再在 A_2A_2'，A_3A_3'，A_4A_4' 上分别取 G_2，G_3，G_4，使

$$\frac{|A_2G_2|}{|G_2A_2'|}=3,\quad \frac{|A_3G_3|}{|G_3A_3'|}=3,\quad \frac{|A_4G_4|}{|G_4A_4'|}=3.$$

同上可证 $\boldsymbol{G}_2$，$\boldsymbol{G}_3$ 和 $\boldsymbol{G}_4$ 都与 $\boldsymbol{G}_1$ 相同。因此这四点必相重合，即 A_1A_1'，A_2A_2'，A_3A_3' 和 A_4A_4' 共点于 G，且 G 分 A_1A_1'，A_2A_2'，A_3A_3' 和 A_4A_4' 成 $3:1$。

2. 设 A_1A_2，A_3A_4；A_1A_3，A_2A_4；A_1A_4，A_2A_3 三对对棱的中点分别是 M_1，M_2；M_3，M_4；M_5，M_6。再设 M_1M_2，M_3M_4，M_5M_6 的中点分别是 L，M，N。于是

$$\boldsymbol{M}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\quad 和\quad \boldsymbol{M}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4).$$

且 $$\boldsymbol{L}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2)=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4),$$

因此 L 与 G 相重合，同理，M 和 N 也都和 G 相重合．本性质得证．▌

习 题 2·4

1．已知三向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$．试作出向量 $-\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\,\boldsymbol{b}-\frac{\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{c}$．

2．已知 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$，又 $\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}=60°$．求 $\left|\boldsymbol{a}-\frac{2}{5}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\right|$．

3．在习题 2·3 第 3 题中，假如：(1) $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{A_1A_3}$, $\boldsymbol{q}=\overrightarrow{A_1A_4}$；(2) $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{A_1A_3}$, $\boldsymbol{q}=\overrightarrow{A_4A_5}$，求解该问题．

4．补证定理 1、2、3．

5．设两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向不平行，用运算律和作图法分别证明：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}$；　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{b}$；

(3) $\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；　(4) $\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$；

(5) $\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}$．

6．已知两个向量的和与差，用作图法作出这两个向量．

7．已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 交于 E, O 是任意点．求证 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OE}$．

8．求证：由三角形两边中点所作成的线段（叫中位线）平行于第三边，且等于第三边之半．

9．设 $ABCD$ 是一个空间四边形，又对角线 AC 和 BD 的中点分别是 L 和 M，求证 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{LM}$．

10．设四面体 $OABC$ 的三条棱 AB, BC, CA 的中点分别是 L, M, N．求证 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$．

11．求证：可作一个三角形，使它的三条边分别平行于另一个已知三角形的三条中线．

12．已知六角形 $ABCDEF$．如果 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ 构成一个三角形，求证 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FA}$ 也构成一个三角形．

13．求证：三角形三条中线共点，此点叫重心．当三角形顶点的位置向量已知时，求重心的位置向量．

14. 已知梯形 $OACB$，其中 $BC \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}OA$，又 M 与 N 各为上底 BC 和下底 OA 的中点．如果 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{A}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{B}$，推求 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{MN}$．

15. 在 $\triangle ABC$ 中，作外平分角线 AL'，已知 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$，求 $\overrightarrow{AL'}$．

*16. 三角形各边依次以同比而分，则三个分点所构成的三角形必与原三角形有相同的重心，并推广到空间四边形加以论证．

[提示：用顶点的位置向量．]

*17. 已知空间四边形 $ABCD$，求证：按每边字母的顺序分四边 AB，BC，CD，DA 之比均是 λ 的四个分点，必是一个平行四边形的四个顶点．

第五节　向量的线性关系

本节将利用向量的线性运算来研究一组向量彼此间的关系问题．

5·1　共线向量

设有一组向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…，它们的方向相同或相反．如在图 2-23 中，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是同向向量，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 是反向向量．以 O 为始点，将 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 平移到 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，显然它们必在一条直线 l 上．从而有如下定义：

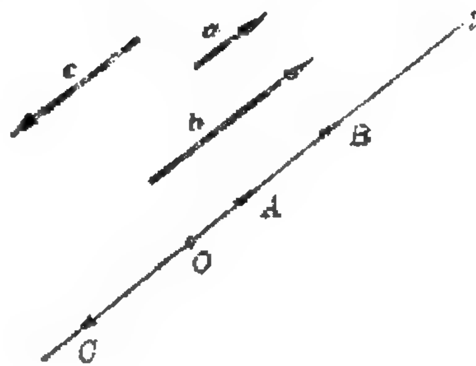


图　2-23

定义　如果一组向量都与一条直线平行[注]，则称它们是共线的，这些向量就叫做共线向量．

关于共线向量的性质有以下定理：

定理 1　两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是

[注]　指表示向量的有向线段与一直线平行．

$$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

这里 $k\neq 0$, 它是由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 唯一确定的一个数.

【证】 1. 必要条件

i) 如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向, 则 $\boldsymbol{b}^\circ=\boldsymbol{a}^\circ$. 所以

$$\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{b}^\circ=b\boldsymbol{a}^\circ=\frac{b}{a}(a\boldsymbol{a}^\circ)=\frac{b}{a}\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a},$$

这里 $$k=\frac{b}{a}\neq 0.$$

ii) 如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 反向, 则 $\boldsymbol{b}^\circ=-\boldsymbol{a}^\circ$. 所以

$$\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{b}^\circ=b(-\boldsymbol{a}^\circ)=-\frac{b}{a}(a\boldsymbol{a}^\circ)=-\frac{b}{a}\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a},$$

这里 $$k=-\frac{b}{a}\neq 0.$$

2. 充分条件

i) 如果 $k>0$, 由定义知: $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向, 且 $\boldsymbol{b}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 k 倍, 故知 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.

ii) 如果 $k<0$, 由定义知: $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向, 且 $\boldsymbol{b}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 $-k$ 倍, 故知 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线. 】

推论 1 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在两个非零的数 l、m, 使

$$l\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}. \tag{2}$$

推论 2 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线且适合 (2), 则 $l=m=0$.

以上两个推论的证明作为习题, 留给读者, 其中推论 2 的证明可用反证法.

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$, 共线, 以后常记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

【例 1】 如果两个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 不共线, 推求两个非零向量 $a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$ 和 $b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2$ 共线的充要条件.

解：如果两个向量 $a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$ 和 $b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2$ 共线，则由(2)，一定有两个非零数 l、m，使

$$l(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)+m(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{0},$$

即
$$(la_1+mb_1)\boldsymbol{e}_1+(la_2+mb_2)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}.$$

但 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，故由推论 2 可得

$$la_1+mb_1=0,\ la_2+mb_2=0.$$

此二元齐次线性方程组有非零解的充要条件是：$a_1b_2-a_2b_1=0$（见附录第五节）．此即所求的充要条件．

定理 2 三个不同的点 A, B, C 共线的充要条件是：存在三个都不是零的数 l, m, n, 使

$$l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0},\ l+m+n=0. \quad (3)$$

图 2-24

【证】 三个点 A, B, C 共线的充要条件是 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 共线（图 2-24）．由(2)得：$p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{0}$, $pq\neq 0$. 此时 $p\neq q$, 否则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{0}$, 而 A 与 C 相重合，此与假设相矛盾．又上式可以写作

$$p\boldsymbol{A}+(q-p)\boldsymbol{B}-q\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}.$$

取 $l=p\neq 0$, $m=q-p\neq 0$, $n=-q\neq 0$, 则 $l+m+n=0$. 于是本定理得以证明．】

推论 设三个点 A, B, C 不共线，且适合

$$l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}\quad (l+m+n=0).$$

则

$$l=m=n=0. \quad (4)$$

*【例 2】 如果两个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，且

$$\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{B}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{C}=c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2,$$

求 A, B, C 三点共线的充要条件．

解：由定理 2 的(3)式可得：A, B, C 三点共线的充要条件是：

$$l(a_1e_1+a_2e_2)+m(b_1e_1+b_2e_2)+n(c_1e_1+c_2e_2)=\mathbf{0},$$

且

$$l+m+n=0. \tag{A}$$

将上式改写为

$$(la_1+mb_1+nc_1)e_1+(la_2+mb_2+nc_2)e_2=\mathbf{0}.$$

因为 e_1 及 e_2 不共线，由定理 1 推论 2 可得

$$la_1+mb_1+nc_1=0; \tag{B}$$

$$la_2+mb_2+nc_2=0. \tag{C}$$

由(A)，(B)及(C)知，l, m, n 有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

又 $$l:m:n=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

因为定理 2 要求 l, m, n 都不是零，故所求的充要条件是：上面三阶行列式为零，且 a_1, b_1, c_1 都不相等。

5·2 共面向量

仿照共线向量的定义和性质，对于共面向量，有

定义 如果一组向量都与一个平面平行[注]，则称它们是共面的，这些向量就叫做共面向量。

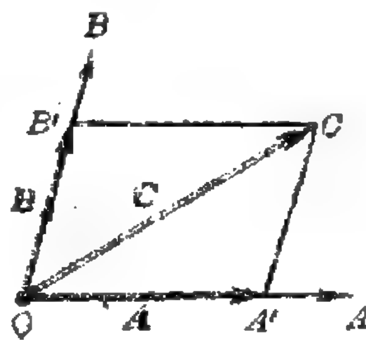


图 2-25

定理 3 若三个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 中没有两个共线，则它们共面的充要条件是：

$$\boldsymbol{c}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}. \tag{6}$$

这里 p, q 是由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 唯一确定的两个非零的数。

【证】 1. 必要条件 将 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 都平移到以 O 为始点

[注] 指表示向量的有向线段与一平面平行。

的一个平面内(图2·25)．过C作$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$的平行线与$\overrightarrow{OB}$和$\overrightarrow{OA}$分别交于B'和A'．于是$\overrightarrow{OA'}=p\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB'}=q\boldsymbol{b}$．这里$p$，$q$都不是零．故有$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}.$$

如果另有一种方法将$\boldsymbol{c}$写作

$$p'\boldsymbol{a}+q'\boldsymbol{b}. \tag{5'}$$

比较(5)和(5')，得$(p-p')\boldsymbol{a}+(q-q')\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$．由定理1推论2即得$p-p'=0$，$q-q'=0$．故(5)中的$p$和$q$是唯一确定的．

2．充分条件　设$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，且不共线，于是$\overrightarrow{OA'}=p\boldsymbol{a}$和$\overrightarrow{OB'}=q\boldsymbol{b}(p\neq0,\ q\neq0)$必不共线．由于(5)成立，可知$\boldsymbol{c}$必是以$\overrightarrow{OA'}$和$\overrightarrow{OB'}$为邻边的平行四边形的对角线所形成的向量．故$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$必共面．】

推论　若三个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$中没有两个共线，则它们共面的充要条件是：存在三个都不是零的数l、m、n，使

$$l\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

定理4　三个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$共面的充要条件是存在三个不都是零的数l，m，n，使

$$l\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}. \tag{6}$$

【证】1．必要条件　(1) 设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$中有两个共线，例如$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，则由(2)式知$l\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ $(lm\neq0)$．故(6)式成立．其中$l\neq0$，$m\neq0$，$n=0$．

(2) 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$中没有两个共线，则由定理3的推论可知(6)式成立，且$l\neq0$，$m\neq0$，$n\neq0$．

2．充分条件　(1) 设(6)式成立，且$l=0$，$m=0$，$n\neq0$．此时$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$．此不合理．

(2) 设(6)式成立，且$l\neq0$，$m\neq0$，$n=0$，则由定理1的推论1可知$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线．因此$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$共面．

(3) 设(6)式成立，且 $l\neq0$, $m\neq0$, $n\neq0$, 则由定理 3 的推论可知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面. 】

推论 三个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面且适合 (6) 式，则 $l=m=n=0$.

定理 5 空间四个不同的点 A, B, C, D 中没有三个共线，则它们共面的充要条件是存在四个都不是零的数 p, q, r, s 使

$$p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{B}+r\boldsymbol{C}+s\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0} \quad (p+q+r+s=0). \tag{7}$$

【证】 四个点 A, B, C, D 中没有三个共线，即 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 没有两个共线. 因此，四点 A, B, C, D 共面的充要条件是 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 共面. 由定理 3 的推论，得 $l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{0}$, l, m, n 都不为 0. 即 $l(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})+m(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})+n(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$ 或 $(l+m+n)\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{B}-m\boldsymbol{C}-n\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$. 取 $p=l+m+n$, $q=-l$, $r=-m$, $s=-n$. 则 $p+q+r+s=0$, 且 p, q, r, s 都不是 0. 于是(7)成立. 】

推论 设四个点 A, B, C, D 不共面，且适合

$$p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{B}+r\boldsymbol{C}+s\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0} \quad (p+q+r+s=0). \tag{8}$$

则
$$p=q=r=s=0.$$

*【例 3】 如图 2-26, 已知 A, B, C, D 四点共面. 如果 AB 和 CD 交于 E, AC 和 BD 交于 F. 试求 E 和 F 的位置向量.

解: 由(7)得

$$\overrightarrow{OP}=p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{B}=-(r\boldsymbol{C}+s\boldsymbol{D}).$$

这里 $p+q=-(r+s)$. 如果取 $p+q=-(r+s)=1$, 则由 (3) 可知 P, A, B 及 P, C, D 必共线. 因此 P 就是 AB 和 CD 的交点 E. 于是

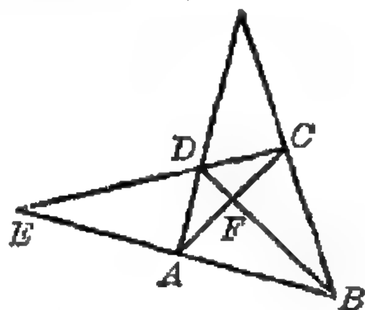


图 2-26

$$\overrightarrow{OE}=p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{B},\ p+q=1,$$

或
$$\overrightarrow{OE}=-(r\boldsymbol{C}+s\boldsymbol{D}),\ r+s=-1,$$

同理可得

$$\overrightarrow{OF}=pA+rC,\ p+r=1,$$

或

$$\overrightarrow{OF}=-(qB+sD),\ q+s=-1.$$

注意 利用本章第十节例2可将 $p,\ q,\ r,\ s$ 用 $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{D}$ 表示.

5·3 向量的分解

前面已经看到，如果向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线，则它们所在平面上的任一非零向量 $\boldsymbol{r}$ 根据(5)可以写成

$$\boldsymbol{r}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}. \tag{9}$$

而且这种表示法是唯一的. 这样的向量 $\boldsymbol{r}$ 称为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的线性组合，或者说向量 $\boldsymbol{r}$ 分解成了两个向量：一个是平行于 $\boldsymbol{a}$ 的 $p\boldsymbol{a}$；另一个是平行于 $\boldsymbol{b}$ 的 $q\boldsymbol{b}$. 特殊情况，如果 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行时，则 $q=0$；如果 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，则 $p=0$.

将这问题扩展，则有下述定理：

定理6 如果向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面，则任意非零向量 $\boldsymbol{r}$ 可写成

$$\boldsymbol{r}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+s\boldsymbol{c}. \tag{10}$$

这里 $p,\ q,\ s$ 是由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定的.

【证】 将 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{r}$ 都平移到同一始点 O (图 2-27)，而成向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 及 $\overrightarrow{OR}$.

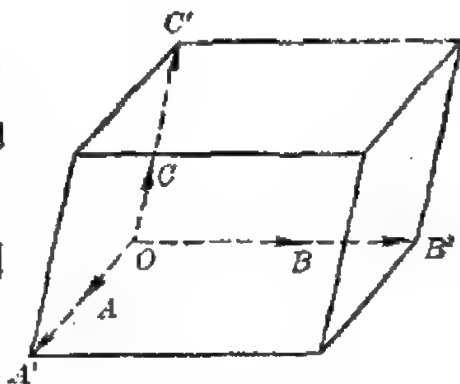


图 2-27

如果 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，则有 $\boldsymbol{r}=p\boldsymbol{a}$, $p\neq0$, 此时 $q=s=0$. 同理可有 $q\neq0$, $s=p=0$ 或 $s\neq0$, $p=q=0$ 的情况.

如果 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面但不与 $\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{c}$ 共线，则

$$\boldsymbol{r}=q\boldsymbol{b}+s\boldsymbol{c},\ q\neq0,\ s\neq0.$$

此时 $p=0$. 同理可有 $q=0$, $s\neq0$, $p\neq0$ 或 $s=0$, $p\neq0$, $q\neq0$ 的情况。

除去上述情况，过 R 点作三个平面分别与 OB, OC; OC, OA 和 OA, OB 所定的平面相平行。于是由第二节例 3 有

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OC}.$$

即
$$\boldsymbol{r}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+s\boldsymbol{c}.$$

如果 $\boldsymbol{r}$ 可以写作另一形式

$$\boldsymbol{r}=p'\boldsymbol{a}+q'\boldsymbol{b}+s'\boldsymbol{c}.$$

将此两式相减，得

$$(p-p')\boldsymbol{a}+(q-q')\boldsymbol{b}+(s-s')\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

但 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面，根据定理 4 推论，则得到 $p-p'=0$, $q-q'=0$, $s-s'=0$. 因此 p, q, s 是唯一确定的. ▌

由以上定理可知：如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是三个不共面的向量，则任意一个向量 $\boldsymbol{r}$ 都可以写成 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的线性组合 (10)，或说 $\boldsymbol{r}$ 可以分解为三个向量，它们分别与 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共线. 而且这样的分解是唯一的.

推论 已知四个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. 则必存在不都是零的数 p, q, r, s 使

$$p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}+s\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}. \tag{11}$$

证明可分两个共线、三个共面、既不共线又不共面诸情况. 作为习题，留给读者自证.

*5·4 向量的相关性

本节从代数角度讨论一组向量间的关系，从而将前面的一些结果概括起来.

定义 已知 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n (n\geqslant1)$, 如果存在着不都是零的 n 个数 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n, 使

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1+\lambda_2 \boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n \boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}, \tag{12}$$

则这 n 个向量就称为线性相关．反之，若等式(12)仅限于

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

时才成立，则这 n 个向量就称为线性无关．(12) 的左端叫做 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合．

根据线性相关的定义可以推出：

定理 7 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关的充要条件是这 n 个向量中的一个为其余 $(n-1)$ 个的线性组合．

【证】 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关，则(12)成立．从而 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中至少有一个不是零．如果 $\lambda_i \neq 0$，则(12)可写成：

$$\boldsymbol{a}_i=-\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \boldsymbol{a}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_i} \boldsymbol{a}_2-\cdots-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \boldsymbol{a}_{i-1}$$

$$-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \boldsymbol{a}_{i+1}-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda_i} \boldsymbol{a}_n,$$

即知 $\boldsymbol{a}_i$ 是 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合．

反之，如果 $\boldsymbol{a}_j$ 是 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合，即

$$\boldsymbol{a}_j=\lambda_1 \boldsymbol{a}_1+\lambda_2 \boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_{j-1} \boldsymbol{a}_{j-1}$$

$$+\lambda_{j+1} \boldsymbol{a}_{j+1}+\cdots+\lambda_n \boldsymbol{a}_n,$$

令 $\lambda_j=-1$，即得(12)．】

由定义还可以推出：

定理 8 一个向量线性相关的充要条件：它是一个零向量．

由定理 1 推论 1 可推得：

定理 9 两个非零向量线性相关的充要条件：它们是共线向量．

由定理 4 可推出：

定理 10 三个非零向量线性相关的充要条件：它们是共面向量．

由定理 6 的推论可推得：

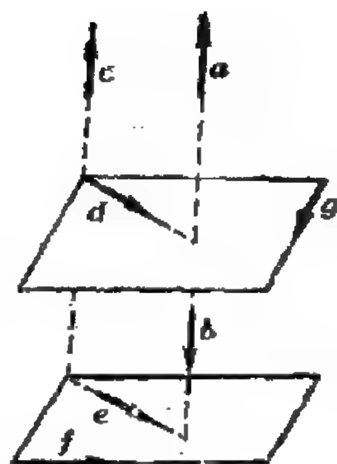
定理 11 四个非零向量必线性相关．

这四个定理的证明，作为练习留给读者．

习 题 2·5

1．在图中表示的两个平行平面和许多向量中，指出哪些是共线的？哪

些是共面的?



习题 2·5 第 1 题

2. 已知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线; $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 共线. 问 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 是否共线?
3. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面; $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e}$ 共面, 问 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{e}$ 是否共面?
4. 设 A、B、C、D 四点共面. 已知 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ 共线, 问 $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$ 是否共线? $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$ 是否共面?
5. 已知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线. 求 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线的充要条件.
6. 设两个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线, 试确定 k, 使两个向量 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线.
7. 设三个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 不共面. 求证两个向量 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ 和 $a(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$ 共线, 其中 $a\neq 0$.
8. 设两个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线. 如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$. 求证 A, B, D 三点共线.
9. 设两个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 不共线. 如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{AD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$. 求证 A, B, C, D 四点共面.
10. 设三个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 不共面. 又设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$. 问 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是否共面?
11. (1) 已知 P、A、B 三个点, 且有 $\boldsymbol{P}=l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$, $lm\neq 0$, 求证 P、A、B 共线的充要条件是 $l+m=1$.

    (2) 已知两个点 A 与 B. 求证此两点所在直线上的任一点的位置向量可以写成 $l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$, $l+m=1$.
12. (1) 已知 P、A、B、C 四点, 且有 $\boldsymbol{P}=l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}$, $lmn\neq 0$. 求证 P、A、B、C 共面的充要条件是 $l+m+n=1$.

    (2) 已知 $\triangle ABC$, 求证此三角形所在平面内的任一点的位置向量可以写成 $l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}$, $l+m+n=1$.
13. 补出本节未加证明的推论和定理.
14. 求证(3)式及(7)式的位置向量与始点选择无关.
15. 求证空间四个点 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 共面的充要条件是: 存在四个不都是

零的数 p、q、r、s，使(7)式成立。[提示：如果 A、B、C 共线，则 $p\neq 0$，$q\neq 0$，$r\neq 0$，$s=0$，其它三点共线的情况也同。如果 A、B、C、D 中没有三个共线，则 $p\neq 0$，$q\neq 0$，$r\neq 0$，$s\neq 0$。]

*16. 设 O 为正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心。求证 $\sum\limits_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k}=\mathbf{0}$。[提示：$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2}$ 共 n 个向量等式相加。]

*第六节　向量的线性运算在初等几何上的应用

研究初等几何(欧氏几何)，一般来说有三种方法：一种是在中学里开始阶段学的综合法；一种是在中学后阶段所学的坐标法，这是中学解析几何所采用的方法。还有一种方法就是向量法。前面我们已经看到了用向量的线性运算解决较简单的初等几何问题。本节将通过一些例题来说明用向量解决较复杂的初等几何问题。可以看到用向量解决问题有时是比较简捷的。

【例 1】 求证三条高线共点，此点叫垂心。当三个顶点的位置向量已知时，求垂心的位置向量。

【证及解】 在图 2-28 中，$\operatorname{tg}B=\dfrac{AD}{BD}$，$\operatorname{tg}C=\dfrac{AD}{CD}$，故得 $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B}$。由第四节(15)可得：

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\boldsymbol{B}+\dfrac{BD}{CD}\boldsymbol{C}}{1+\dfrac{BD}{CD}}=\frac{\boldsymbol{B}\operatorname{tg}B+\boldsymbol{C}\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}.$$

在高线 AD 上取一点 H，使 $\dfrac{AH}{HD}=\dfrac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A}$，于是：

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boldsymbol{A}+\dfrac{AH}{HD}\overrightarrow{OD}}{1+\dfrac{AH}{HD}}=\frac{\boldsymbol{A}\operatorname{tg}A+\boldsymbol{B}\operatorname{tg}B+\boldsymbol{C}\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}.$$

同理可证：H 也在高线 BE 和 CF 上。因此三条高线共点于 H，且得出位置向量 $\overrightarrow{OH}$。】

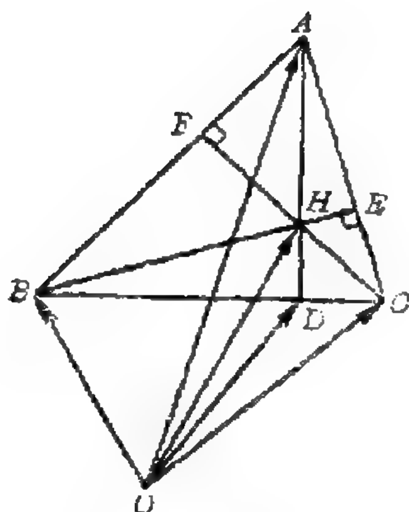


图 2-28

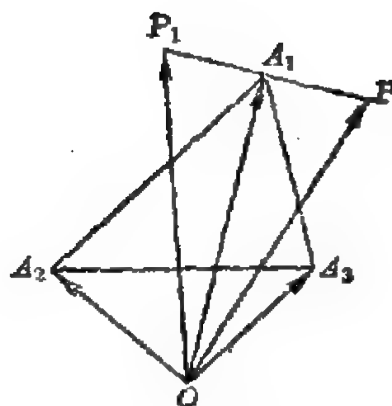


图 2-29

【例 2】 已知 $\triangle A_1A_2A_3$ 及不在边上的任一点 P. 设 P_1 是 P 关于 A_1 的对称点，同样地，P_2 是 P_1 关于 A_2 的对称点，P_3 是 P_2 关于 A_3 的对称点，P_4 是 P_3 关于 A_1 的对称点，P_5 是 P_4 关于 A_2 的对称点，P_6 是 P_5 关于 A_3 的对称点. 求证 P_6 与 P 相重合.

【证】 取不在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的边上一点 O 为始点(图 2-29). 于是在 $\triangle OP_1P$ 中，OA_1 是中线.

因此 $\quad 2\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}_1$, 即 $\quad \boldsymbol{P}_1=2\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{P}$.

同样地，$\quad \boldsymbol{P}_2=2\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_3=2\boldsymbol{A}_3-\boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{P}_4=2\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{P}_3,$

$$\boldsymbol{P}_5=2\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{P}_4,\ \boldsymbol{P}_6=2\boldsymbol{A}_3-\boldsymbol{P}_5.$$

将 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_5$ 相加:

$$\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_5=2(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3)-(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_4);$$

将 $\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_6$ 相加:

$$\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_4+\boldsymbol{P}_6=2(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3)-(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_5).$$

将此两式相减，得 $\boldsymbol{P}_6=\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{P}_6$ 与 $\boldsymbol{P}$ 相重合. 】

【例 3】 已知一个平行六面体，取过一顶点的三棱及对角线. 以其中的两棱及这条对角线为棱，且以已知顶点为公共顶点，作三个平行六面体. 每个平行六面体过此顶点的对角线为棱，再作一个平行六面体. 求证过公共顶点的对角线必落在已知平行六面体的对角线上，且是原长的五倍.

【证】 在图 2-13 中分别以 OP, OB, OC; OP, OC, OA; OP, OA, OB 为棱，作三个平行六面体，且它们的对角线是 OU, OV, OW. 再以

OU, OV, OW 为棱，作一个平行六面体，它的对角线是 OQ. 于是由第二节例 3 可知：

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

故 $\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{OA}+2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，同理

$$\overrightarrow{OV}=\overrightarrow{OB}+2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}),\ \overrightarrow{OW}=\overrightarrow{OC}+2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

将此三式相加，得

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OU}+\overrightarrow{OV}+\overrightarrow{OW}=5(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

所以 $\overrightarrow{OQ}=5\overrightarrow{OP}$. 于是得证. ▌

【例 4】 梅尼劳 (Menelaus) 定理 在 $\triangle ABC$ 的三个边 BC, CA, AB 或其延线上分别取 L, M, N 三点，又分比是

$$\lambda=\frac{BL}{LC},\ \mu=\frac{CM}{MA},\ \nu=\frac{AN}{NB}.$$

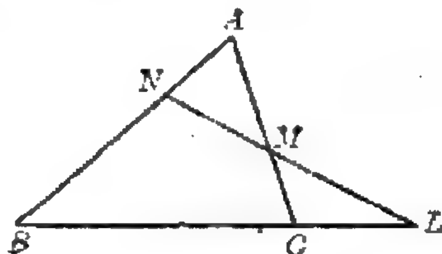


图 2-30

于是 L, M, N 三点共线的充要条件是 $\lambda\mu\nu=-1$.

【证】 1. 必要条件 我们有

$$\boldsymbol{L}=\frac{\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{C}}{1+\lambda},\quad \boldsymbol{M}=\frac{\boldsymbol{C}+\mu\boldsymbol{A}}{1+\mu},\quad \boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{A}+\nu\boldsymbol{B}}{1+\nu}.$$

如果 L, M, N 三点共线，则由第五节(3)知

$$\begin{cases} l\left(\dfrac{\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{C}}{1+\lambda}\right)+m\left(\dfrac{\boldsymbol{C}+\mu\boldsymbol{A}}{1+\mu}\right)+n\left(\dfrac{\boldsymbol{A}+\nu\boldsymbol{B}}{1+\nu}\right)=\boldsymbol{0}, \\ l+m+n=0,\ l,\ m,\ n \text{ 都不等于 } 0. \end{cases} \tag{A}$$

即有

$$\left(\frac{m\mu}{1+\mu}+\frac{n}{1+\nu}\right)\boldsymbol{A}+\left(\frac{n\nu}{1+\nu}+\frac{l}{1+\lambda}\right)\boldsymbol{B}+\left(\frac{l\lambda}{1+\lambda}+\frac{m}{1+\mu}\right)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}. \tag{B}$$

由第五节定理 4 推论知：

$$\frac{m\mu}{1+\mu}+\frac{n}{1+\nu}=0,\quad \frac{n\nu}{1+\nu}+\frac{l}{1+\lambda}=0,\quad \frac{l\lambda}{1+\lambda}+\frac{m}{1+\mu}=0. \tag{C}$$

此为，l, m, n 的三元齐次方程组有非零解，则

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\mu}{1+\mu} & \dfrac{1}{1+\nu} \\ \dfrac{1}{1+\lambda} & 0 & \dfrac{\nu}{1+\nu} \\ \dfrac{\mu}{1+\lambda} & \dfrac{1}{1+\mu} & 0 \end{vmatrix}=0,$$

展开得

$$\lambda\mu\nu=-1. \tag{D}$$

由(C)的前两式得

$$\begin{aligned} l:m:n&=\mu\nu(1+\lambda):1+\mu:-\mu(1+\nu) \\ &=-1+\mu\nu:1+\mu:-\mu(1+\nu). \end{aligned} \tag{E}$$

且有 $$lmn\neq 0,\ l+m+n=0.$$

2．充分条件　设(D)成立，则(C)有非零解，且由(E)知(B)成立，故 L、M、N 三点共线．】

【例 5】 **塞瓦 (Ceva) 定理**　在 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 或其延线上分别取 L, M, N 三点(图 2-31)．又分比是

$$\lambda=\frac{BL}{LC},\ \mu=\frac{CM}{MA},\ \nu=\frac{AN}{NB}.$$

于是 AL, BM, CN 三线共点的充要条件是 $\lambda\mu\nu=1$．

【证】 1．必要条件　设 AL, BM, CN 共点于 P．以 P 为始点，则 $\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{A}$, $\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{B}$, $\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{C}$．于是就有

$$\overrightarrow{PL}=\boldsymbol{L}=x\boldsymbol{A},\ \overrightarrow{PM}=\boldsymbol{M}=y\boldsymbol{B},$$
$$\overrightarrow{PN}=\boldsymbol{N}=z\boldsymbol{C}.$$

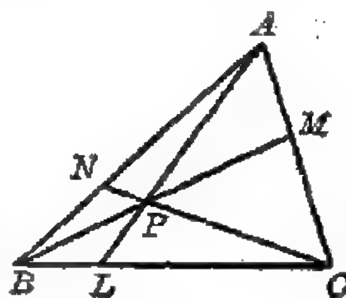


图 2-31

由习题 2-5 第 12 题，有 $\boldsymbol{P}=l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}$，这里 l, m, n 是非零常数．但 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0}$，故有 $l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$．将 $\boldsymbol{A}$ 用 $\boldsymbol{L}$ 表示，就有

$$\frac{l}{x}\boldsymbol{L}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}.$$

但 B, L, C 三点共线，故有 $\dfrac{l}{x}+m+n=0$．即 $x=-\dfrac{l}{m+n}$．所以

$$\boldsymbol{L}=-\frac{l}{m+n}\boldsymbol{A}=\frac{m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}}{m+n}.$$

即知 $\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{n}{m}$．同理可得 $\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{l}{n}$，$\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{m}{l}$．于是推出

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{n}{m}\cdot\frac{l}{n}\cdot\frac{m}{l}=1,$$

故得 $\lambda\mu\nu=1$.

2. 充分条件　设有 $\lambda\mu\nu=1$, 且 AL, BM 交于 P. 同上可证:

$$\boldsymbol{L}=\frac{m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}}{m+n},\quad \boldsymbol{M}=\frac{n\boldsymbol{C}+l\boldsymbol{A}}{n+l},$$

故 $\lambda=\frac{n}{m}$, $\mu=\frac{l}{n}$. 因此 $\nu=\frac{m}{l}$. 故有

$$\overrightarrow{PN}=\frac{\boldsymbol{A}+\frac{m}{l}\boldsymbol{B}}{1+\frac{m}{l}}=\frac{l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}}{l+m}=-\frac{n\boldsymbol{C}}{l+m}.$$

从而知 P, N, C 共线. 于是 AL, BM, CN 共点于 P. ▌

习　题　2·6

1. 设 $ABCD$ 是一个平行四边形, 且 E 为 AB 的中点. 求证 AC 和 DE 互相三等分.
2. 以平行六面体的一个顶点为始点, 沿三个棱作向量. 求四条对角线向量.
3. 以平行六面体的一个顶点为始点, 沿三个相邻面上的对角线作三个向量. 求证三向量的和恰是以同一顶点为始点所作的平行六面体的对角线上的向量的二倍.
4. 已知四面体 $OABC$. 当 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 已知时, (1)求其它各个棱向量; (2)求 ABC 面上的中线向量; (3)求向量 $\overrightarrow{OG}$, 这里 G 是 $\triangle ABC$ 的重心; (4) 如果 OA, OB, OC 的中点是 P、Q、R; BC, CA, AB 的中点是 A'、B'、C'. 推求 $\overrightarrow{PA'}$, $\overrightarrow{QB'}$ 和 $\overrightarrow{RC'}$.
5. 平行六面体的四条对角线及四对对棱的中点联线共八条, 试证它们必共点.
6. 已知 $\triangle ABC$, 又知 P 点与 $\triangle ABC$ 的三个顶都不相同. 试作三个平行四边形 $PBLC$, $PCMA$, $PANB$. 求证 AL, BM, CN 将互相平分.

*7. 求证三角形的三条内平分角线共点, 此点叫内心. 当三个顶的位

置向量已知时，求内心的位置向量.

[提示：参考第四节例 3.]

*8. 仿上题求证三角形的一条内平分角线与两个所对外角的平分角线共点，这点叫傍心，共三个. 并求傍心的位置向量.

*9. 已知四面体 $ABCD$ 和任一点 P. 又 PA, PB, PC, PD 与 BCD, ACD, ABD, ABC 四个平面分别交于 A', B', C', D'. 求证

$$\frac{PA'}{A'A}+\frac{PB'}{B'B}+\frac{PC'}{C'C}+\frac{PD'}{D'D}=-1.$$

[提示：写出 A', B', C', D' 的位置向量，再分别写出 A', B, C, D; A, B', C, D; A, B, C', D; A, B, C, D' 共面的条件.]

*10. 在第五节例 3 中，设 AD 和 EF 交于 G，求 G 的位置向量. [提示：$\overrightarrow{OG}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{D}=\gamma(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{B})+\delta(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{C})$，这里 $\alpha+\beta=1$, $\gamma+\delta=1$.]

第七节　向量的分量

前面我们已经给出了向量的几何表示，并介绍了向量的线性运算，而这些运算实质上是几何运算，它具有一定的局限性，在很多问题上是不够用的. 在本节中我们引进向量的另一种表示——代数表示，也就是向量的分量，于是向量的运算就转为数的运算，从而可以利用坐标来研究向量.

设有平面直角坐标系 Oxy（图 2-32），在两个坐标轴的正向上，分别取两个单位向量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$. 设平面内有一点 P，则由第五节(9)式可知：

$$\boldsymbol{P}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}. \qquad (1)$$

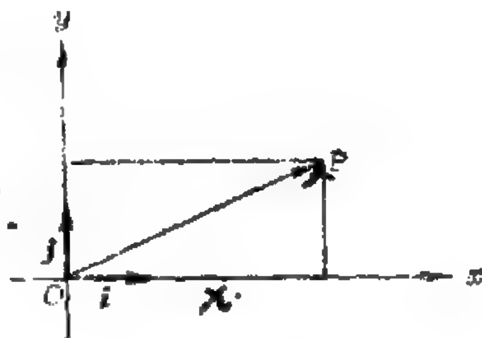


图 2-32

这里 x 和 y 显然就是 P 的两个坐标，(1)式就叫做向量 $\boldsymbol{P}$ 的代数表示，x 和 y 叫做它的分量或

坐标．(1)式有时也记作 $\boldsymbol{P}=\{x, y\}$．向量的分量是与坐标系的选取有关的，但坐标系是由 $O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 来确定的．因此我们把坐标系也记作 $O\boldsymbol{ij}$．并把 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 叫做基本向量或坐标向量．

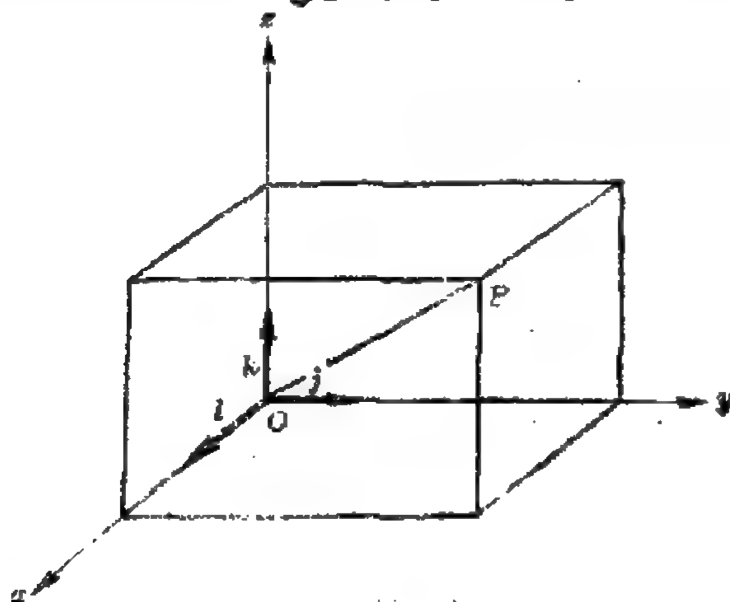


图 2-33

同理在空间直角坐标系的坐标轴上取三个单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 也叫基本向量或坐标向量．由第五节(10)式知：

$$\boldsymbol{P}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

这叫向量 $\boldsymbol{P}$ 关于坐标系 $O\boldsymbol{ijk}$ 的代数表示，x、y 和 z 叫做它的分量或坐标．(2)有时也记作 $\boldsymbol{P}=\{x, y, z\}$．由第一章第三节知 x, y 和 z 就是 $\boldsymbol{P}$ 的一组方向数．显然，零向量的分量都是零．

利用(1)或(2)，就可以将平面或空间点的坐标与位置向量的分量相沟通．

现在研究向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$．由于

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2}&=\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

我们也将 $x_2-x_1=X$，$y_2-y_1=Y$，$z_2-z_1=Z$ 叫做 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的分

量或坐标，这里 X、Y 和 Z 就是 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在三坐标轴上的射影的大小。于是

$$\overrightarrow{P_1P_2}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}. \tag{3}$$

有时也记作 $\overrightarrow{P_1P_2}=\{X, Y, Z\}$.

为一般起见，下面仅就 $O\boldsymbol{ijk}$ 来研究，至于 $O\boldsymbol{ij}$ 的情况，作为练习留给读者考虑.

设有两个向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$. 如果它们相等，也就是

$$a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}.$$

移项得：$\quad (a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$

由第五节定理 4 推论，得 $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$. 反过来也成立. 于是有

定理 1 两个向量相等的充要条件是对应分量相等.

将向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ 相加或相减，则由加法交换律以及数与乘法的第一类分配律，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\pm(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_1\pm b_1)\boldsymbol{i}+(a_2\pm b_2)\boldsymbol{j}+(a_3\pm b_3)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$ 的分量就是 $a_1\pm b_1$, $a_2\pm b_2$, $a_3\pm b_3$. 从而得

定理 2 两个向量的和或差的分量等于对应分量的和或差.

再作数乘向量. 利用数与向量乘法的第二类分配律，有

$$m\boldsymbol{a}=m(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})=ma_1\boldsymbol{i}+ma_2\boldsymbol{j}+ma_3\boldsymbol{k}.$$

于是 $m\boldsymbol{a}$ 的分量就是 ma_1, ma_2, ma_3. 从而有

定理 3 当向量乘上一个数时，它的每个分量都乘上这个数.

利用(1)，(2)和(3)，当 $O\boldsymbol{ij}$ 或 $O\boldsymbol{ijk}$ 选定后就可以将一个向量等式分别化为两个或三个含坐标的等式. 例如第四节

的定比分点公式(15)在坐标系 $Oijk$ 里取 $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则得

$$\boldsymbol{P}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{P}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{P}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

于是有

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)\boldsymbol{k}.$$

利用定理 1, 也就是比较 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 的对应系数, 则得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

这正好就是第一章第五节里的公式(2).

【例 1】 设 $\triangle ABC$ 的顶点坐标已知, 求重心 G 的坐标.

解: 利用习题 2.4 第 13 题 $\boldsymbol{G}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

1. 在 Oij 里, 由 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, $G(g_1, g_2)$ 得 $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{B}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{C}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{G}=g_1\boldsymbol{i}+g_2\boldsymbol{j}$. 从而得

$$g_1\boldsymbol{i}+g_2\boldsymbol{j}=\frac{1}{3}[(a_1+b_1+c_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2+c_2)\boldsymbol{j}].$$

比较 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 的对应系数, 有

$$g_1=\frac{1}{3}(a_1+b_1+c_1),\ g_2=\frac{1}{3}(a_2+b_2+c_2).$$

2. 在 $Oijk$ 里, 由 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $G(g_1, g_2, g_3)$, 同理可推得

$$g_1=\frac{1}{3}(a_1+b_1+c_1),\ g_2=\frac{1}{3}(a_2+b_2+c_2),$$

$$g_3=\frac{1}{3}(a_3+b_3+c_3).$$

【例 2】 已知 $\triangle ABC$ 和顶角 A 的内平分角线 AL. 当顶点坐标已知时，求 $\overrightarrow{AL}$ 的分量.

解：利用第四节例 3 的

$$\overrightarrow{AL}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}.$$

1. 在 $O\boldsymbol{ij}$ 里有 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, 因而得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL}&=\frac{1}{b+c}\{b[(b_1-a_1)\boldsymbol{i}+(b_2-a_2)\boldsymbol{j}]\\&\quad+c[(c_1-a_1)\boldsymbol{i}+(c_2-a_2)\boldsymbol{j}]\}\\&=\frac{1}{b+c}\{[b(b_1-a_1)+c(c_1-a_1)]\boldsymbol{i}\\&\quad+[b(b_2-a_2)+c(c_2-a_2)]\boldsymbol{j}\}.\end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{AL}$ 的分量为

$$\left\{\frac{1}{b+c}[b(b_1-a_1)+c(c_1-a_1)],\ \frac{1}{b+c}[b(b_2-a_2)+c(c_2-a_2)]\right\}.$$

2. 在 $O\boldsymbol{ijk}$ 里有 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$. 同理可以得出 $\overrightarrow{AL}$ 的分量是：

$$\left\{\frac{1}{b+c}[b(b_1-a_1)+c(c_1-a_1)],\ \frac{1}{b+c}[b(b_2-a_2)+c(c_2-a_2)],\ \frac{1}{b+c}[b(b_3-a_3)+c(c_3-a_3)]\right\}.$$

注意 从这两个例题可以看出：向量等式不论在平面或空间都是一样的. 可是用坐标写出同样性质的公式就要分别注明，这是向量等式的一个优越性. 另一方面，一些空间问题

用坐标直接推求是比较困难的(如例 1 或例 2)。而先用向量解决，再化成坐标表示，却是轻而易举的事情，这又是用向量的一个优越性。

习 题 2·7

1. 设 $\boldsymbol{a}=\{1, 2, 3\}$，$\boldsymbol{b}=\{4, 5, 6\}$。求 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$，$\lambda\boldsymbol{a}\pm\mu\boldsymbol{b}$，这里 λ，μ 是常数。
2. 设 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$，$\overrightarrow{AB}=\{c_1, c_2, c_3\}$。求 B。
3. 将第五节定理 1 的推论 1 和定理 2 化成坐标形式。
4. 将第五节定理 3 的推论和定理 5 化成坐标形式。
5. 已知三个向量 $\boldsymbol{a}=\{3, -2\}$，$\boldsymbol{b}=\{-2, 1\}$，$\boldsymbol{c}=\{7, -4\}$。试确定这三个向量中每一个关于其它两个的分解式。
6. 已知四个向量 $\boldsymbol{a}=\{2, 1, 0\}$，$\boldsymbol{b}=\{1, -1, 2\}$，$\boldsymbol{c}=\{2, 2, -1\}$，$\boldsymbol{d}=\{3, 7, -1\}$。试确定这四个向量中每一个关于其它三个的分解式。
7. 已知平行四边形 $ABCD$。如果 $\overrightarrow{AC}=\{a_1, a_2, a_3\}$，$\overrightarrow{BD}=\{b_1, b_2, b_3\}$，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{DA}$。
8. 已知 $\triangle ABC$ 及其三边中点分别是 A'，B'，C'。当三顶点坐标已知时，证明 $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\boldsymbol{0}$。
9. 判断下列各组的三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是否共面？如果共面，则将 $\boldsymbol{c}$ 表成 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的线性组合。

   (1) $\boldsymbol{a}=\left\{\cos^2\theta,\ \sec^2\theta,\ \frac{1}{2}\right\}$，$\boldsymbol{b}=\left\{\sin^2\theta,\ -\mathrm{tg}^2\theta,\ \frac{1}{2}\right\}$，$\boldsymbol{c}=\{1, 1, 1\}$；

   (2) $\boldsymbol{a}=\{1, 0, 0\}$，$\boldsymbol{b}=\{0, 1, 0\}$，$\boldsymbol{c}=\{0, 0, 1\}$。

*10. 在空间有 n 个质点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, \cdots, n)$，每个质点的质量分别是 m_i。推求这 n 个质点系的质心的位置向量的分量。

[提示：参照第一章第五节例 3 以及力学的一个性质：两个质点的质心位于两点的联线上且它和两点间的距离与此两质点的质量成反比例。]

第八节　向量的数乘法

8·1　两向量的数乘法

本节引进向量和向量的一种乘法．这里关于两向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}$ 与第一章第三节中两条射线夹角的规定是一样的，于是 $0 \leqslant \widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}} \leqslant \pi$.

定义　两个向量的数量积（也叫点积或内积）是一个数量，它的大小是这两个向量的长度与其夹角的余弦的乘积．这种运算称为数乘法（也叫点乘法或内乘法）．

两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的数量积的记法通常有以下三种：$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{ab}$ 和 $(\boldsymbol{ab})$．本书采取第一种记法．按定义，于是有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \tag{1}$$

在这里应注意：两个向量的数量积是一个数量，这就是在"积"的前面加上"数量"二字的原因．下面可以看出，从公式(1)推出的一些性质与在中学所学过的一些内容以及本书第一章中用坐标推出的一些结果是完全一致的，这就说明对(1)这样的规定是有意义的．而且(1)及由此推出的一些性质在力学、工程技术中对简化问题是很有用处的．

注意　我们须把中学代数里的两个数 a 与 b 的乘积 ab 或 $a \cdot b$（用普通字母表示）与这里的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$（用粗体字母表示）严格区分开．括弧可用来表示运算的次序，例如 $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ 的数量积；$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ 表示数量 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ 与向量 $\boldsymbol{C}$ 的积．

由公式(1)可以推出两个简单性质：

性质 1　设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，则

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{ab}. \tag{2}$$

容易看出，当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角是锐角、直角或钝角时，则数量积分别是正、零或负；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时，则数量积分别是 ab 或 $-ab$，反之也成立。

向量既然由有向线段来表示，因此一个向量在另一个向量上的射影，就可以看作是一个有向线段在另一个有向线段上的射影。下面推求射影大小的计算公式：

设 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 上的射影是 OM。在图 2-34(a) 中，α 是锐角，则

$$OM = |\overrightarrow{OA}|\cos\alpha > 0;$$

在图 2-34(b) 中，α 是钝角，则

$$OM = |\overrightarrow{OA}|\cos\alpha < 0.$$

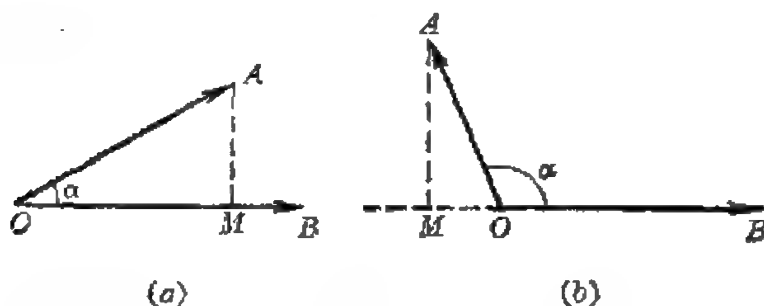


图 2-34

因此一个有向线段在另一个有向线段上的射影的大小等于第一个的长度与它们的夹角余弦的乘积。就两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 来说，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = a(\boldsymbol{b}\text{ 在 }\boldsymbol{a}\text{ 上的射影的大小})$$
$$= b(\boldsymbol{a}\text{ 在 }\boldsymbol{b}\text{ 上的射影的大小}).$$

于是得

性质 2 两个非零向量的数量积是其中一个向量的长度与另一个向量在这个向量上的射影大小(指有向线段的大小)

的乘积.

在 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 中，如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，我们规定一种简便记法：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2. \tag{3}$$

由于 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}})=\cos 0=1$，故有

$$\boldsymbol{a}^2=a^2. \tag{4}$$

注意 1. $\boldsymbol{a}^3$ 无意义. 2. 由 $\boldsymbol{a}^2=a^2$ 可以推出 $a=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$，但不能推出 $\boldsymbol{a}=\pm a$.

【例 1】 求 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 中每两个的数量积.

解：由定义知 $|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=|\boldsymbol{k}|=1$，且

$$\widehat{\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}}=\widehat{\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}}=\widehat{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}}=90°.$$

故由公式(1)，得

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1;$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

这个结果可以归纳成一个表：

$\cdot$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	1	0	0
$\boldsymbol{j}$	0	1	0
$\boldsymbol{k}$	0	0	1

【例 2】 将力学中的作功问题用数量积来表示.

解：在力学中，我们知道一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于一点 O 而得到一个位移 $\boldsymbol{S}$. 于是功 W 就等于力的大小 f，位移的长 s 与 $\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{S}})$ 的积. 利用公式(1)，得

$$W=fs\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{S}})=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}.$$

*【例 3】 如图 2-35，在 $\triangle ABC$ 中，BE 是 AC 边上的高，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则

$$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{b^2}\right)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

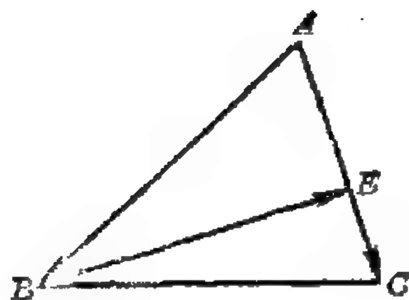


图 2-35

【证】 从(2)知：$\cos A=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{bc}$，又

$$\cos A=\frac{AE}{AB},$$

故 $$AE=c\left(\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{bc}\right)=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{b},$$

又 $$\overrightarrow{AE}=AE\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{b}\left(\frac{\boldsymbol{b}}{b}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{b^2}\right)\boldsymbol{b}.$$

因此 $$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{b^2}\right)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.\ ▮$$

数量积在几何上的最大作用就是研究向量垂直[注]的问题。下面证明两个定理。

定理 1 如果两个向量之一为零，或二者互相垂直，则它们的数量积必是零，反之也成立。

【证】 1．如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=0$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

2．如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=0$，于是 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=0$，从而知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$。▮

定理 2 两个非零向量垂直的充要条件是数量积是零。

8·2 运算律

现在讨论向量的数乘法的基本运算律。

交换律 由于 $\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}$ 是无向角，故 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}})$。于是由(1)即得：

定理 3 向量的数乘法适合交换律

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}. \tag{5}$$

[注] 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直是指它们所在的有向线段垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$。

结合律 假定在三个因子中有两个是向量，一个是数量。由下述定理给出结合律：

定理 4 一个数及两个向量关于数与向量的乘法以及数乘法适合结合律，即

$$(m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}). \tag{6}$$

【证】 如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一是零向量，则(6)显然成立。今假定 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 都不是零向量。

1. 设 $m>0$，则由图 2-36(a) 知：

$$|m\boldsymbol{a}|=ma,\ \widehat{m\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}=\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}.$$

所以 $$|m\boldsymbol{a}|b\cos(\widehat{m\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=mab\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}).$$

即得(6)。



图 2-36

2. 设 $m<0$，则由图 2-36(b) 知：

$$|m\boldsymbol{a}|=-ma,\ \widehat{m\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}=\pi-(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}).$$

所以 $$|m\boldsymbol{a}|b\cos[\pi-(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})]=mab\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}).$$

即得(6)。】

推论 1

$$(m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{b}). \tag{7}$$

推论 2

$$(m\boldsymbol{a})\cdot(n\boldsymbol{b})=mn(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}). \tag{8}$$

【证】

$$(m\boldsymbol{a})\cdot(n\boldsymbol{b})=m[\boldsymbol{a}\cdot(n\boldsymbol{b})]=m[(n\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}]$$
$$=m[n(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})]=mn(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})=mn(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).】$$

【例 4】 已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 都不垂直，则 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 成立的充要条件是 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 共线.

【证】 1. 必要条件

由

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=[ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})]\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=[bc\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}})]\boldsymbol{a}.$$

根据假设 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})\neq 0$；$\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}})\neq 0$. 由上述等式及题设，得

$$[ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})]\boldsymbol{c}=[bc\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}})]\boldsymbol{a}.$$

故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 必共线.

2．充分条件　设 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 上的单位向量，且 $\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}=\theta$.

(1) 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 同向，则 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 也是 $\boldsymbol{c}$ 上的单位向量，所以

$$\widehat{\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}}=\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}=\theta.$$

故

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=abc\cos\theta\boldsymbol{a}^{\circ},$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=abc\cos\theta\boldsymbol{a}^{\circ}.$$

(2) 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 异向，则 $-\boldsymbol{a}^{\circ}$ 将是 $\boldsymbol{c}$ 上的单位向量，所以

$$\widehat{\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}}=\pi-\theta.$$

故

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=-abc\cos\theta\boldsymbol{a}^{\circ},$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=-abc\cos\theta\boldsymbol{a}^{\circ}.$$

归纳(1)、(2)，即得 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$. ▌

分配律　在讨论分配律时，我们假定三个因子均是向量.

定理 5　三个向量关于加法及数乘法适合分配律，即

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c};\\ \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}.\end{cases}\tag{9}$$

【证】 作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$ (图 2-37). 于是 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 再作 $BM\perp\overrightarrow{AD}$，$CN\perp\overrightarrow{AD}$，由性质 2 知：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=cAM,\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=cMN.$$

将此二式相加，得

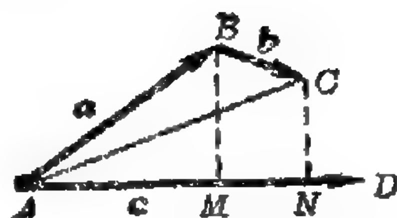


图 2-37

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=c(AM+MN)=cAN.$$

但 $\qquad \overrightarrow{AO}\cdot\boldsymbol{c}=cAN,$

即 $\qquad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=cAN.$

比较这两式，即得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. 利用交换律即可推得 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$. ▌

推论 1

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}. \tag{10}$$

令 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}$ 即可证明。

推论 2

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_m)\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{b}. \tag{11}$$

推论 3

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_m)\cdot(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{b}_n)\\ =\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_n\\ +\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_n\\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +\boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{b}_n.\end{aligned} \tag{12}$$

或者用连加号写成

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{a}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{b}_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_j. \tag{13}$$

消去律 对向量的数乘法不成立。举一反例如下：于图 2-38，设有非零向量 $\boldsymbol{A}$，又有与 $\boldsymbol{A}$ 共面的两个向量 $\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{C}$，使得 BC 与 OA 垂直且交于 M. 则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 上的射影的大小 $=|\boldsymbol{A}||OM|$. 同理，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=|\boldsymbol{A}|OM$. 于是 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$. 但是显然 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

【例 5】 求证 $(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$.

【证】

$$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$
$$=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2.$$ 】

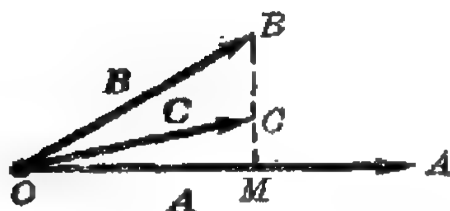


图 2-38

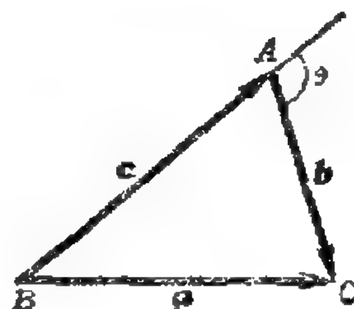


图 2-39

【例 6】 利用数量积推出三角形的余弦定理.

解：在图 2-39 中，$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. 根据例 5，两端平方得 $\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{BC}^2$. 即

$$c^2+2bc\cos\theta+b^2=a^2.$$

所以
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

同理可推得其它两式.

注意 例 6 可以说是例 5 中的等式 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$ 的几何解释.

8·3 数量积的分量表示

前面利用数量积的定义及运算律可以解决一些几何问题. 现在引进它的分量表示，就可以更广泛地进行讨论.

设有两个非零向量

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}.$$

利用公式(12)，就可以将

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$

分解为多项，再用公式(8)，即得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+a_1b_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+a_1b_3(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})$$
$$+a_2b_1(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+a_2b_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+a_2b_3(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})$$
$$+a_3b_1(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+a_3b_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+a_3b_3(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}).$$

根据例1即得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \qquad (14)$$

从而得

定理6 两个非零向量的数量积等于它们的对应分量乘积的和.

推论 两个非零向量垂直的充要条件是对应分量乘积的和为零.

这可以由定理2直接推出. 当非零向量是位置向量时，此推论就是第一章第四节定理5的推论.

下面推导向量长度的公式. 在公式(13)中，如果 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$，也就是 $b_1=a_1$, $b_2=a_2$, $b_3=a_3$ 时，则得 $\boldsymbol{a}^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$.

从而得

$$a=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \qquad (15)$$

即下述定理:

定理7 一个向量的长度等于它的各分量的平方和的平方根.

设有 $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\overrightarrow{OP}$ 及 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的分量分别是 $\{x, y, z\}$ 及 $\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$. 由(15)得

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这个结果分别与第一章第二节公式(1)及(3)是一致的.

下面再推导两个非零向量的夹角. 设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$. 于是由(15)得

$$a=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},\quad b=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}.$$

由本节公式(2)，可得

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{16}$$

从而有

定理8 两个非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$和 $\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ 的夹角由(16)给出.

如果取 $\boldsymbol{P}_1=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$，$\boldsymbol{P}_2=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$，则(16)即化为

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

这和第一章第四节的公式(3)是一致的.

我们仍将非零向量和坐标轴间的夹角称为向量的方向角；它的余弦称为向量的方向余弦.

推论 非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ 的方向余弦是

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\\ \cos\beta&=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

【证】 取 $\boldsymbol{i}$ 作为 $\boldsymbol{b}$，即 $b_1=1,\ b_2=0,\ b_3=0$. 由(16)得 $\cos\alpha=\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$，同理可得 $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$. 】

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，它们的方向余弦分别是 $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma;\ \cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma'$. 则

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}};\ \cos\alpha'=\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}},$$

$$\cos\beta'=\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}},\ \cos\gamma'=\frac{b_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

代入(16)，即得

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=\cos\alpha\cdot\cos\alpha'+\cos\beta\cdot\cos\beta'+\cos\gamma\cdot\cos\gamma'.$$

此与第一章第四节的公式(1)是一致的.

【例 7】 设有 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，$\mathbf{c}=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}$。求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\mathbf{c}$ 的长度和方向余弦，并求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\mathbf{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角.

解：由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\mathbf{c}=\{a_1+b_1+c_1, a_2+b_2+c_2,\ a_3+b_3+c_3\}$，设 $a=a_1+b_1+c_1$，$b=a_2+b_2+c_2$，$c=a_3+b_3+c_3$. 由(15)得

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\mathbf{c}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

又由(17)知，它的方向余弦将是

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

由(16)可得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\mathbf{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\mathbf{c},\ \boldsymbol{a}})=\frac{aa_1+ba_2+ca_3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

【例 8】 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$. 先证 $-ab\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant ab$，再推出柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式

$$\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{3}b_i^2}.\qquad(18)$$

【证】 由于 $-1\leqslant\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})\leqslant1$，即有 $-ab\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant ab$. 将(14)及(15)代入上式，即得(18). 当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向时，

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=1,$$

于是(18)即变成等式. 】

习 题 2·8

1. (1)求两个共线向量的数量积；(2)求两个单位向量的数量积.

2. 已知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 两向量. 如果 $a=\frac{1}{3}$, $b=6$, $\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}=\frac{\pi}{3}$. 求证：$3\boldsymbol{a}-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+4\sqrt{\boldsymbol{b}^2}=23$.

3. (1) 求证：$\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}=\arccos\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})}}$；

   (2) 求证：$\left(\frac{\boldsymbol{a}}{a^2}-\frac{\boldsymbol{b}}{b^2}\right)^2=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}{a^2b^2}$.

4. 如果二力之和与差成直角，求证：此二力的强度相等.

5. 求证：向量 $\boldsymbol{a}$ 分别与向量 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ 及 $\boldsymbol{b}-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{a^2}$ 垂直.

6. (1)设 $a=3$, $b=5$. 试定 α，使 $\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}$ 垂直；(2)设已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. 试定 β，使 $\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直.

7. 设 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}}=\frac{\pi}{3}$, $\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}}=\frac{\pi}{6}$, 且 $a=1$, $b=2$, $c=3$. 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的长度.

8. 已知 $\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}=\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{p}=l\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{q}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 的夹角.

9. 已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a, b, c\}$, $\boldsymbol{b}=\{b, c, a\}$, $\boldsymbol{c}=\{c, a, b\}$. 求证：(1) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$；(2) $\arccos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}})=\arccos(\widehat{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}})=\arccos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$.

10. 设三个非零向量等长且两两垂直. 求证：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的夹角相等.

11. 已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$, $\boldsymbol{c}=\{c_1, c_2, c_3\}$. 试求：(1)$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上射影的大小；(2) $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上射影的大小；(3)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上射影的大小；(4)$\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 上射影的大小.

12. 如果 $\boldsymbol{a}=\{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{b}=\{2, 4, k\}$. 试定 k 值，使(1)$\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}$ 是锐角或钝角；(2)$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直；(3)$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向；(4)$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 反向；(5)$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行.

13. 求证：空间四边形其四边的平方和等于对角线的平方和加上对角

线中点联线平方的 4 倍.

*14. 求证: (1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=a^2-b^2$; (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$. 并说明每个等式的几何意义. [提示: 用平行四边形来说明.]

*15. 求证: 三角形三边的中垂线共点, 此点叫三角形的外心. [提示: 已知 $\triangle ABC$, 又知三边的中垂线 $A'L$、$B'M$、$C'N$, 这里 A'、B'、C' 分别是三边的中点. 如果 $B'M$, $C'N$ 交于 $\boldsymbol{K}$, 则

$$\left(\boldsymbol{K}-\frac{\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}}{2}\right)\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})=0,\ \left(\boldsymbol{K}-\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{2}\right)\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0.$$

用恒等式

$$\left(\boldsymbol{K}-\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{2}\right)\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})+\left(\boldsymbol{K}-\frac{\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}}{2}\right)\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})+\left(\boldsymbol{K}-\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{2}\right)\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$$

即可推出 $A'K$ 与 BC 垂直.]

第九节 向量的矢乘法

9·1 两向量的矢乘法

本节引进向量与向量的另一种乘法.

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是三个不共面的有序向量. 过 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 作一个平面, 则 $\boldsymbol{C}$ 指向这平面的一侧(见图 2-40). 同第一章第一节一样, 在图 2-40(a) 中, 若用右手表示, 则将指掌弯成弧形, 由指掌到指尖的转动方向作为 $\boldsymbol{A}$ 经过最短路径到 $\boldsymbol{B}$ 的转动方向, 于是拇指方向是 $\boldsymbol{C}$ 的方向. 这样顺序的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 就形成了*右手系*. 同理, 在图 2-40(b) 中, $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 形成*左手系*. 显见, 如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是右手系, 则 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 也必是右手系, 但是 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{B}$ 则形成左手系.

定义 两个向量的*向量积* (也叫*叉积*或*外积*) 是一个向

量，它的长度是这两个向量的长度与其夹角的正弦的乘积，它的方向分别垂直于这两个向量，且使第一个向量、第二个向量（注意次序）及此方向上的单位向量形成右手系．这种运算称为矢乘法（也叫叉乘法或外乘法）．



图 2-40

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的记法通常有以下三种：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ 和 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$．本书采用第一种记法．按定义，于是有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=ab\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})\boldsymbol{n}^{\circ}. \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{n}^{\circ}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{n}^{\circ}\perp\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{n}^{\circ}$ 形成右手系（图 2-41）．也就是 $\boldsymbol{n}^{\circ}$ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 上的单位向量．

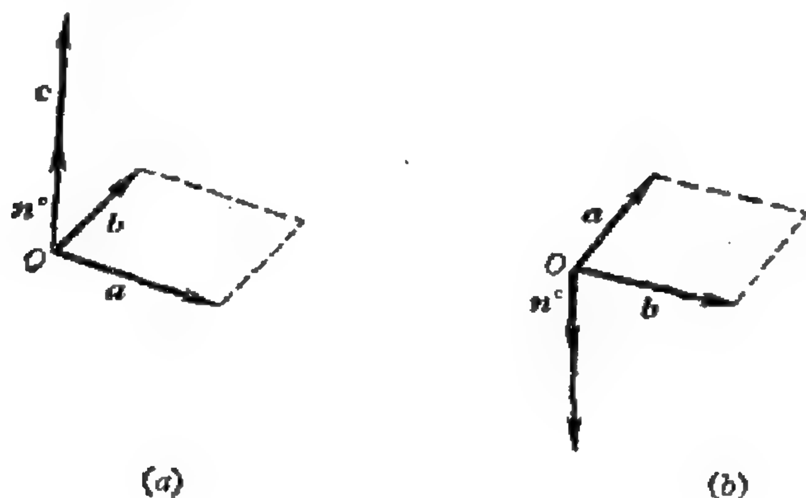


图 2-41

设 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=ab\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})$ 是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积的数值，而且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$；$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 形成右手系．于是得到

推论　两个非零向量的向量积的长度等于以这两个向量为邻边的平行四边形的面积的数值．

注意　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$，这个性质以后经常用到．

【例 1】　求 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 中每两个的向量积．

解：由公式(1)可知：$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$．又 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}$；$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 都成右手系．因此由公式(1)有：

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}.$$

并且 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}, -\boldsymbol{i}$；$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, -\boldsymbol{j}$；$\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}, -\boldsymbol{k}$ 也形成右手系．因此由公式(1)有：

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}.$$

上述结果可以归纳成下表：

$\times$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	0	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	0	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	0

【例 2】　将力学中的力矩用向量积来表示．

解：在力学中，我们知道：力 $\boldsymbol{f}$ 关于 O 点的力矩是一个向量，它的方向是垂直于过 O 点与力 $\boldsymbol{f}$ 的平面，而使在力 $\boldsymbol{f}$ 作用下的平面按反时针方向转动（图 2-42），且力矩 $\boldsymbol{M}$ 的数值 m 由下式规定：$m=pf$，这里 p 是力臂，就是从 O 到力 $\boldsymbol{f}$ 方向的垂距，$f=|\boldsymbol{f}|$．设 $\boldsymbol{A}$ 是力 $\boldsymbol{f}$ 的作用点 A 的位置向量，则 pf 等于向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 所成的平行四边形的面积的数值（p 是其

高)．因此可以将力矩 M 写作 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{f}$．所以关于一点的力矩等于力的作用点关于这点的位置向量和力的向量积．

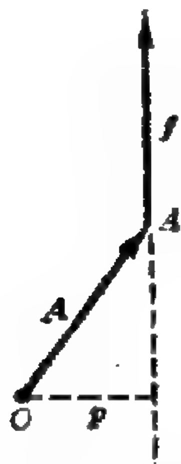


图 2-42

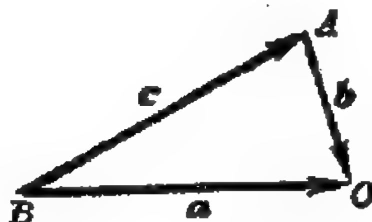


图 2-43

【例 3】 求证$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=a^2b^2$．再由三角形的三边推导它的面积(即三斜求积公式)．

【证和解】 由

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}),$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=ab\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})\boldsymbol{n}^\circ,$$

根据第八节(4)式，将此两式平方相加，得

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2$$

$$=a^2b^2[\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})+\sin^2(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})].$$

所以 $$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=a^2b^2.$$

在图 2-43 中，设 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\mathbf{c}$．于是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\mathbf{c}$．由本节推论可知：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|.$$

再利用上面的结果，得到

$$S_{\triangle ABC}^2=\frac{1}{4}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=\frac{1}{4}[a^2b^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2]$$

$$=\frac{1}{4}[ab+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})][ab-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]$$

$$=\frac{1}{16}[a^2+2ab+b^2-(\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)]$$

$$\times[\boldsymbol{a}^2-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}^2-(a^2-2ab+b^2)]$$

$$=\frac{1}{16}[(a+b)^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2][(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2-(a-b)^2]$$

$$=\frac{1}{16}[(a+b)^2-\mathbf{c}^2][\mathbf{c}^2-(a-b)^2]$$

$$=\frac{1}{16}[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$$

$$=\frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

所以 $$S_{\triangle ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

这里 $$s=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

从上节我们知道，数量积可用来讨论向量的垂直问题，而这里的向量积可用来讨论向量的平行[注]问题。下面证明两个定理：

定理 1 如果两向量之一为零，或二者共线，则其向量积必是零向量，反之也成立。

【证】 1. 如果 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$。故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$。

2. 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，则 $ab\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，于是必有 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$。由此知 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$。】

[注] 两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行是指它们所在的有向线段平行，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，实质上与共线完全一样。

由此定理容易推出：

定理2 两个非零向量平行的充要条件是它们的向量积为零.

9·2 运算律

现在讨论矢乘法的基本运算律.

反交换律 由向量积的定义容易看出：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的长度相等但方向相反(图 2-44)，故得

定理3 向量的矢乘法不适合交换律. 两个向量易位后，所得的向量积等于原来两个向量的向量积的反向量，即

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\ (\text{反交换律}).\quad(2)$$

结合律 与数量积一样，有

定理4 一个数及两个向量关于数与向量的乘法以及矢乘法适合结合律：

$$(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\quad(3)$$

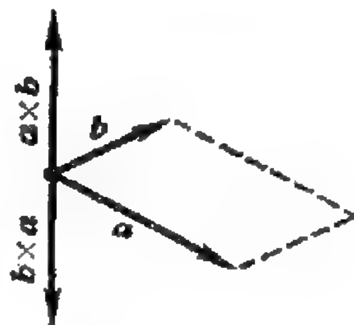


图 2-44

【证】 如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之中有一个是零向量，则(3)显然成立. 今假定 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 都不是零向量.

1. 设 $m>0$，则 $m\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 同向，取 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的单位向量为 $\boldsymbol{n}^\circ$，则 $(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ 上的单位向量也是 $\boldsymbol{n}^\circ$，见图 2-45(a). 故有

$$\begin{aligned}(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}&=|m\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{m\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})\boldsymbol{n}^\circ\\&=m|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})\boldsymbol{n}^\circ=m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

2. 设 $m<0$，则 $m\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 反向，取 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的单位向量为 $\boldsymbol{n}^\circ$，则 $(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ 上的单位向量是 $-\boldsymbol{n}^\circ$，见图 2-45(b). 故有

$$\begin{aligned}(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}&=|m\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{m\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})(-\boldsymbol{n}^\circ)\\&=-m|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})(-\boldsymbol{n}^\circ)\\&=m|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})\boldsymbol{n}^\circ=m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

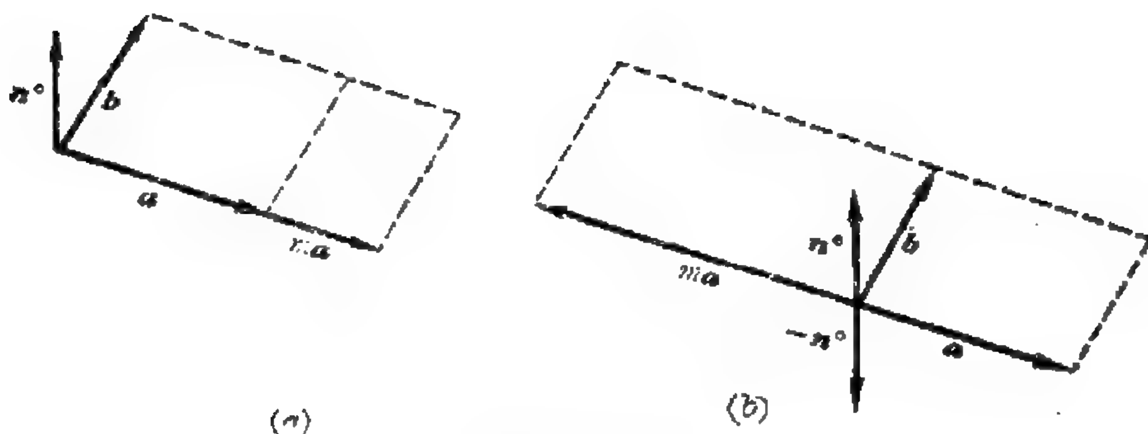


图 2-45

于是(3)式成立. 】

推论 1

$$(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(m\boldsymbol{b}). \tag{4}$$

推论 2

$$(m\boldsymbol{a})\times(n\boldsymbol{b})=mn(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{5}$$

分配律 与数量积一样,有

定理 5 三个向量关于加法及矢乘法适合分配律:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\mathbf{c}=\boldsymbol{a}\times\mathbf{c}+\boldsymbol{b}\times\mathbf{c};\\ \mathbf{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathbf{c}\times\boldsymbol{a}+\mathbf{c}\times\boldsymbol{b}.\end{cases} \tag{6}$$

【证】 如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\mathbf{c}$ 中至少有一个是零向量, 则(6)式显然成立.

今假定它们都不是零向量. 取空间任一点 O 为 $\boldsymbol{a}$, $\mathbf{c}$ 的公共始点(图 2-46). 再作 $\mathbf{c}^\circ$, 过 O 作平面 π 与 $\mathbf{c}$ 垂直. 作 $\boldsymbol{a}$ 在 π 上的射影 $\boldsymbol{a}_1$, 并将 $\boldsymbol{a}_1$ 依时针方向旋转 $+90^\circ$ 到 $\boldsymbol{a}_2$. 在此先证一个引理:

$$\boldsymbol{a}\times\mathbf{c}^\circ=\boldsymbol{a}_2. \tag{A}$$

由于 $\mathbf{c}$、$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}_1$ 共面, 则

$$|\boldsymbol{a}_2|=|\boldsymbol{a}_1|=|\boldsymbol{a}|\cos(90^\circ-\theta)=|\boldsymbol{a}|\sin\theta.$$

故 $|\boldsymbol{a}\times\mathbf{c}^\circ|=|\boldsymbol{a}_2|$, 而且 $\boldsymbol{a}$、$\mathbf{c}^\circ$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 形成右手系, $\boldsymbol{a}_2$ 垂直于

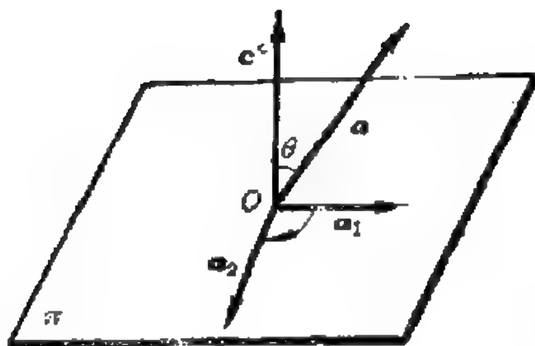


图 2-46

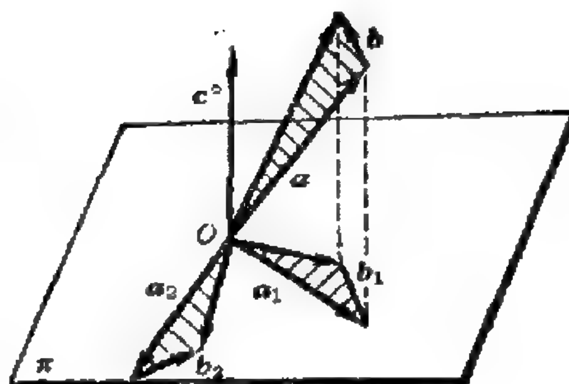


图 2-47

$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}^\circ$. 于是(A)成立.

在图 2-47 里将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 所成的三角形投射到平面 π 内, 得到 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1$ 所成的三角形. 再在平面 π 内将所得的三角形依时针方向旋转 $+90^\circ$ 而得 $\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{b}_2$、$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 所成的三角形. 由(A)可得到

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^\circ=\boldsymbol{b}_2, \tag{B}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^\circ=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2. \tag{C}$$

将(A), (B)代入(C), 即得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^\circ=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^\circ+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^\circ. \tag{D}$$

将(D)的两端乘以 $|\boldsymbol{c}|$, 并利用(4), 得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^\circ)=\boldsymbol{a}\times(|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^\circ)+\boldsymbol{b}\times(|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^\circ).$$

即得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

对于 $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$ 的证明, 可用定理 3 公式(2):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=-[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\\&=-[-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})]\\&=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

于是分配律得证. ▌

注意 由于向量积不满足交换律, 所以必须严格注意(6)

中因子的顺序.

推论1

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}. \qquad (7)$$

推论2

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_m)\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{a}_m\times\boldsymbol{b}. \qquad (8)$$

推论3

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_m)\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{b}_n)\\ &=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}_n\\ &\quad+\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}_n\\ &\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\quad+\boldsymbol{a}_m\times\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_m\times\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_m\times\boldsymbol{b}_n. \end{aligned} \qquad (9)$$

或者用连加号写为

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{a}_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{b}_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{b}_j. \qquad (10)$$

消去律 对于向量的矢乘法消去律也不成立. 举一反例如下: 在图2-48中, 设有非零向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OC}$, 且$BC\parallel OA$. 于是

$$S_{\square OAB'B}=S_{\square OAC'C}.$$

又$\boldsymbol{n}^\circ\perp\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$, 且使$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{n}^\circ$成右手系, 则$\boldsymbol{n}^\circ\perp\boldsymbol{C}$, 且$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{n}^\circ$也成右手系. 故$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$. 但显然$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

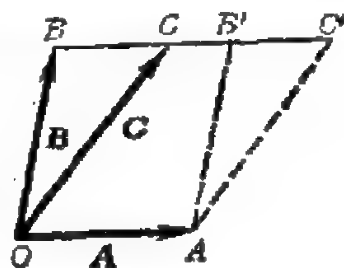


图 2-48

【例4】 求证$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, 并说明此等式的几何意义.

【证及解】

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\\ &=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

又 $$|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|.$$
可知此式表示以平行四边形的对角线为边所成的平行四边形的面积等于原来平行四边形面积的二倍.

【例 5】 已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$, 其中无二者共线, 则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

【证】 1. 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}$, 两边以 $\boldsymbol{a}$ 矢乘, 得 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$, 即 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$, 所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$. 同理 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 所以

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

2. 由 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 可知: 必有一个单位向量 $\boldsymbol{n}^\circ$, 使 $\boldsymbol{n}^\circ\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{n}^\circ\perp\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}^\circ\perp\boldsymbol{c}$. 故 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 必共面. 由本章第五节定理 3 的推论知: 一定存在三个都不是零的数 l、m、n, 使 $l\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 将此等式分别与 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 矢乘, 得

$$m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+n(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0},\ l(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})+n(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0.$$

但 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 故有 $l=m=n$, 即得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 】

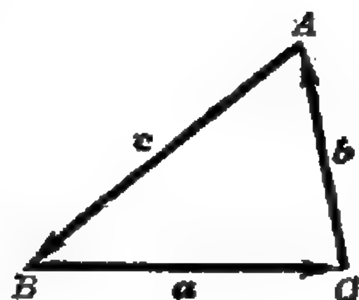


图 2-49

【例 6】 利用向量积推出三角形的正弦定理.

解: 在图 2-49 中, $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 首尾相接形成一个三角形, 故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 由例 5 知: $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 设 $\boldsymbol{n}^\circ\perp\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}^\circ\perp\boldsymbol{c}$, 且 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{n}^\circ$ 成右手系, 于是 $\boldsymbol{n}^\circ\perp\boldsymbol{a}$, 且 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{n}^\circ$; $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{n}^\circ$ 也成右手系. 故有

$$bc\sin(\pi-A)\boldsymbol{n}^\circ=ca\sin(\pi-B)\boldsymbol{n}^\circ=ab\sin(\pi-C)\boldsymbol{n}^\circ.$$

即 $$bc\sin A=ca\sin B=ab\sin C.$$

此即正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

这个结果说明了三角形的正弦定理正是例5的几何意义.

9·3 向量积的分量表示

设有两个非零向量

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}.$$

利用公式(9), 把

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$

展开, 利用公式(5), 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=&a_1b_1(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_1b_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_1b_3(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&+a_2b_1(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_2b_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_2b_3(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&+a_3b_1(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_3b_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_3b_3(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

按例1, 得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.$$

此式可以写作三阶行列式如下:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}.\tag{11}$$

故有

定理6 两个非零向量的向量积可表成一个三阶行列式, 它的第一行的元素为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$; 第二行、第三行的元素分别为第一向量、第二向量的分量.

推论1 两个非零向量共线的充要条件是对应分量成比例.

【证】 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 即 $(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$, 所以

$$a_2b_3-a_3b_2=0,\ a_3b_1-a_1b_3=0,\ a_1b_2-a_2b_1=0.$$

由于 $a_1a_2a_3\neq0$，$b_1b_2b_3\neq0$，故有 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$. 】

推论 2 两个非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ 的夹角是

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})=\frac{\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{12}$$

【证】 由 $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ 即可推出. 】

如果取 $\boldsymbol{P}_1=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$，$\boldsymbol{P}_2=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$，则 (12) 化成

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2})=\frac{\sqrt{(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

这恰与第一章第四节的公式(4)相一致

【例 7】 由例 3 的等式可推出拉格朗日 (Lagrange) 恒等式.

$$(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

【证】 由于

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=a^2b^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2. \tag{*}$$

且

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2},$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$. 代入 (*) 中，即得证. 】

【例 8】 设 $\boldsymbol{A}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\boldsymbol{B}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，$\boldsymbol{C}=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}$. 求证 A, B, C 三点共线的充要条件是

$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$. 并化成坐标式.

【证及解】 由 A, B, C 三点共线的充要条件是 $\overrightarrow{AB}\times$

$\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$，即 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$，展开并利用反交换律即得证．又设 A_1、A_2、A_3；B_1、B_2、B_3；C_1、C_2、C_3 分别是三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

中 a_1、a_2、a_3；b_1、b_2、b_3；c_1、c_2、c_3 的代数余子式（见附录第一节），于是

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}=B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=C_1\boldsymbol{i}+C_2\boldsymbol{j}+C_3\boldsymbol{k}.$$

相加得

$$(A_1+B_1+C_1)\boldsymbol{i}+(A_2+B_2+C_2)\boldsymbol{j}+(A_3+B_3+C_3)\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$$

即得三点共线的充要条件的坐标式是

$$A_1+B_1+C_1=0,\ A_2+B_2+C_2=0,\ A_3+B_3+C_3=0.$$

*【例 9】 设 $\triangle ABC$ 的顶是 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$C(c_1,\ c_2,\ c_3)$．(1)推导 $S_{\triangle ABC}$；(2)证明$(S_{\triangle ABC})^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$，这里 S_1、S_2、S_3 分别是 $\triangle ABC$ 在三个坐标面上的射影所成三角形的面积；(3)求 $\sin A$；(4)求 A 到 BC 的距离．

【解及证】 (1) 因为 $\overrightarrow{AB}=\{b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{c_1-a_1, c_2-a_2, c_3-a_3\}$．所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} b_3-a_3 & b_1-a_1 \\ c_3-a_3 & c_1-a_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 1 \\ b_2 & b_3 & 1 \\ c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 1 \\ b_3 & b_1 & 1 \\ c_3 & c_1 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=(A_1+B_1+C_1)\boldsymbol{i}+(A_2+B_2+C_2)\boldsymbol{j}+(A_3+B_3+C_3)\boldsymbol{k}.$$

这里 A_1、B_1、C_1; A_2、B_2、C_2; A_3、B_3、C_3 与例 8 中表示的意义完全一样．所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(A_1+B_1+C_1)^2+(A_2+B_2+C_2)^2+(A_3+B_3+C_3)^2}.$$

(2) 因为 A, B, C 在 yz 面上的射影是 $(0, a_2, a_3)$, $(0, b_2, b_3)$ 和 $(0, c_2, c_3)$，故

$$S_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a_2 & a_3 & 1\\ b_2 & b_3 & 1\\ c_2 & c_3 & 1\end{vmatrix}$$

的绝对值$=\frac{1}{2}|A_1+B_1+C_1|$．所以 $S_1^2=\frac{1}{4}(A_1+B_1+C_1)^2$; 同理，$S_2^2=\frac{1}{4}(A_2+B_2+C_2)^2$; $S_3^2=\frac{1}{4}(A_3+B_3+C_3)^2$．故得 $(S_{\triangle ABC})^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$.

(3) $$\sin A=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$$
$$=\sqrt{\frac{(A_1+B_1+C_1)^2+(A_2+B_2+C_2)^2+(A_3+B_3+C_3)^2}{\left\{\begin{array}{l}[(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2]\\ \times[(c_1-a_1)^2+(c_2-a_2)^2+(c_3-a_3)^2]\end{array}\right\}}}.$$

(4) 设 d 是 A 到 BC 的距离，于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}d|\overrightarrow{BC}|$，即

$$d=\frac{2S_{\triangle ABC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{(A_1+B_1+C_1)^2+(A_2+B_2+C_2)^2+(A_3+B_3+C_3)^2}}{\sqrt{(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2+(b_3-c_3)^2}}.$$

习　题　2·9

1. 已知 $\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}=\frac{\pi}{6}$，且 $a=1$, $b=\sqrt{3}$．求：(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$; (2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$.
2. 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$．(1)求证：$\mathrm{tg}(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})=\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$; (2)说明 $\frac{\boldsymbol{a}^\circ\times\boldsymbol{b}^\circ}{\sin(\boldsymbol{a}^\circ, \boldsymbol{b}^\circ)}$ 表示什么向量? (3)求证：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2\leqslant a^2b^2$，且求等号成立的充要条件.
3. 推求：(1) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{a})$，$k$ 为常数; (2) $\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}-$

$2\boldsymbol{j}$); (3) $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b})$; (4) $(s_1\boldsymbol{a}+s_2\boldsymbol{b})\times(t_1\boldsymbol{c}+t_2\boldsymbol{d})$.

4. 已知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|=\alpha$, 又 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}$. 求(1) $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}$; (2) $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$.

5. 试求 $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

6. 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件.

7. 设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$, 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{d}$. 求证: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 及 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 必共线.

8. (1)求同时垂直于非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ 及 $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ 的单位向量; (2)设 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦分别是 λ_1, μ_1, ν_1 和 λ_2, μ_2, ν_2. 求单位向量 $\boldsymbol{c}$, 使 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$, 且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 成右手系.

9. 已知四个向量 $\boldsymbol{A}=\{5, 2, -1\}$, $\boldsymbol{B}=\{1, -3, 4\}$, $\boldsymbol{C}=\{-2, 1, 3\}$, $\boldsymbol{D}=\{2, 6, -2\}$. 试证: A、B、C、D 四点构成一个平行四边形, 并求其面积.

10. 设 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+0.3\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=0.1\boldsymbol{i}-4.2\boldsymbol{j}+2.5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 试求 $\boldsymbol{c}$, 并验明 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.

11. 已知两个不共线向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$, 求 $|(p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b})\times(r\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b})|$.

12. 设 $\boldsymbol{\omega}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}=\{b_1, b_2, b_3\}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}=\{c_1, c_2, c_3\}$. 则

$$a_1=b_2=c_3=0,\ b_3=-c_2=\omega_1,$$
$$c_1=-a_3=\omega_2,\ a_2=-b_1=\omega_3.$$

13. 设 $\boldsymbol{a}_1'=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2'=\mu_1\boldsymbol{a}_1+\mu_2\boldsymbol{a}_2$. 求证: 以 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_1'$, $\boldsymbol{a}_2'$ 为邻边的两个平行四边形的面积相等的充要条件是 $|\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1|=1$.

*14. 已知 $\triangle ABC$, 又知任意点 P. 求证 $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CP}$ 为常向量, 并说明此等式的几何意义. [提示: 用位置向量表示此等式.]

*15. 已知三对点 A_1、B_1; A_2、B_2; A_3、B_3, 则 A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3 共点于 P 的充要条件是:

$$\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\times\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_3\times\boldsymbol{B}_3$$
$$+(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3-\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_3)\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0}.$$

第十节　三向量的乘法

三个向量的乘法共有两类，但它们不是一种新运算，而是在两个向量的乘法基础上建立的．分别讨论如下：

10·1　数量三重积

已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三个向量，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$ 为一个向量，因此 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}$ 是一个数量，于是有

定义　两个向量先矢乘，再与另一向量数乘，所得的结果称为数量三重积或者混合积．

现在讨论 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的几何意义．在此假定 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 都是非零向量．

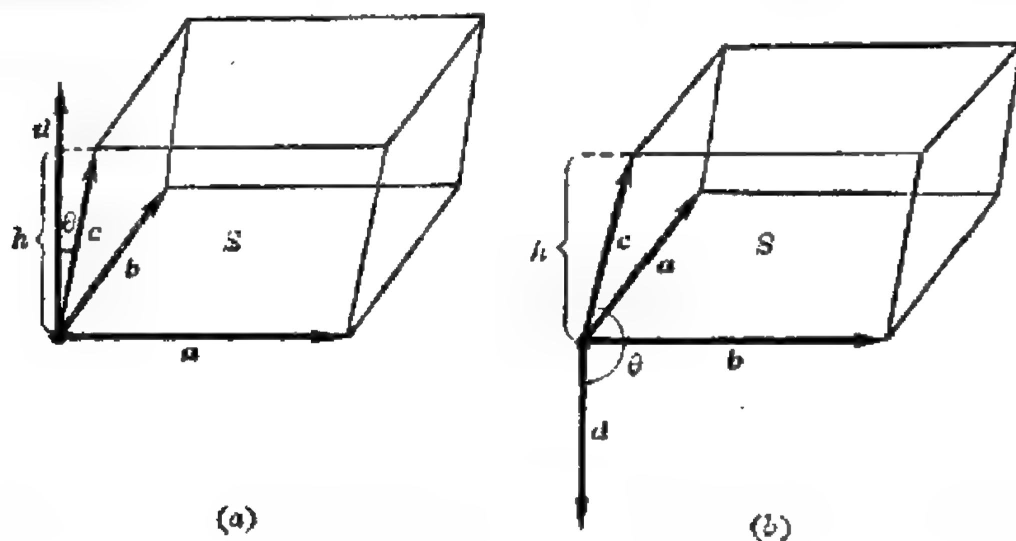


图　2-50

将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 移到共同始点，以它们为棱，作一个平行六面体，并作 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$．设 $\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}}$ 是 θ，底面积是 S，高是 h，体积是 V，于是 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$．在图 2-50$(a)$ 中，$h=|\boldsymbol{c}|\cos\theta$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$；在图 2-50$(b)$ 中，$h=|\boldsymbol{c}|\cos(\pi-\theta)=-|\boldsymbol{c}|\cos\theta$，$\frac{\pi}{2}$

$<\theta<\pi$. 合并此两式，则得 $h=|\boldsymbol{c}||\cos\theta|$. 又

$$V=hS=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}||\cos\theta|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$$

(由于体积总是正数，所以应取绝对值)。由上式可以看出：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 是正或是负，取决于 θ 是锐角或是钝角，也就是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 是指向底面的同侧或是异侧。更明确地说，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 形成右手系时，数量三重积是正；形成左手系时，则为负。故得

定理1 当三个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 成右手系时，则数量三重积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为正，否则为负。又此乘积的绝对值是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱所构成的平行六面体的体积。

由于上述平行六面体也可以看作是以 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 或 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}$ 作底面。故它的体积又可以写作 $|(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}|$ 或 $|(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}|$. 在此注意：$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 成右手系时，$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 也成右手系，故得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}. \tag{1}$$

又因数量积适合交换律，故得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{2}$$

由(1)及(2)得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\end{aligned} \tag{3}$$

当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三者中有一个或两个或三个是零向量时，则(3)中每个式子的值都是零。此六式通常以 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 来表示。

由数量三重积的定义及表示方法，可以得到以下各推论：

推论1

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})=0. \tag{4}$$

这是因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

推论2

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}). \tag{5}$$

这是因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

推论 3

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}',\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}',\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}). \tag{6}$$

【证】

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}',\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})&=[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}')\times\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\&=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}',\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}).\ \blacksquare\end{aligned}$$

推论 4

$$(m\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=m(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}). \tag{7}$$

【证】

$$\begin{aligned}(m\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})&=(m\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=[m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\cdot\boldsymbol{c}\\&=m[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]=m(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}).\ \blacksquare\end{aligned}$$

利用三个向量的数量三重积可以研究三个向量是否共面的问题. 这有下述定理:

定理 2 三个向量中如果有一个为零, 或者两个共线, 或者三个共面、则其数量三重积必是零, 反过来也成立。

【证】 已知三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$:

1. 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$, 即 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=0$; 如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线, 则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 故 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$, 即 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=0$; 如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面, 则 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$, 故 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$, 即 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

2. 设 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=0$, 则

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0,$$

共有三种情况, 即

(1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$;

(2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共线或

$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}$ 共线或 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线；

(3) $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 或 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$ 或 $\boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，即 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面。】

从此容易推出：

定理 3 假定三个非零向量中没有两个共线，则共面的充要条件是其数量三重积为零。

【例 1】 设三个非零向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 中没有两个共线，则共面的充分条件是 $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0}$。

【证】 两边都以 $\boldsymbol{A}$ 数乘，则有

$$\boldsymbol{A}\cdot[(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})]=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{0}.$$

又 $\boldsymbol{A}\perp(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}\perp(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ 故 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=0$，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$。且 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{0}=0$，因此上式化为 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})=0$ 故 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 共面。】

【例 2】 在平面内已知一个四边形 $ABCD$。又 AB，CD 交于 P，求证 $\boldsymbol{P}=\dfrac{(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{D})\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})\boldsymbol{D}}{(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})}$（参看本章第五节例 3）。

【证】 利用分点公式，则有

$$\boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{C}+\lambda\boldsymbol{D}}{1+\lambda}$$

（图 2-51）。由于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{P}$ 共面，故有 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{P})=0$，即

$$\left(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \frac{\boldsymbol{C}+\lambda\boldsymbol{D}}{1+\lambda}\right)=0,$$

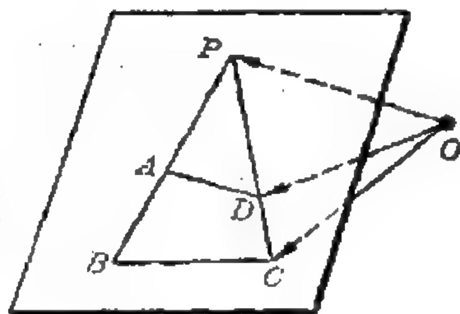


图 2-51

利用 (6) 得 $\left(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \dfrac{\boldsymbol{C}}{1+\lambda}\right)+\left(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \dfrac{\lambda\boldsymbol{D}}{1+\lambda}\right)=0$，利用 (7) 得

$$\frac{1}{1+\lambda}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})+\frac{\lambda}{1+\lambda}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{D})=0,$$

解之，得 $\lambda=-\frac{(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})}{(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{D})}$，代入 $\boldsymbol{P}$ 中，即得证. ∎

下面来推导 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$ 的分量表示：设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}$. 则

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\left\{\begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ c_2, & c_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} b_3, & b_1 \\ c_3, & c_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} b_1, & b_2 \\ c_1, & c_2\end{vmatrix}\right\}.$$

故 $$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix},$$

即

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{8}$$

因此得出：

定理 4 三个非零向量的数量三重积可表示为一个三阶行列式，其第一、第二、第三行的元素分别是三个向量的分量.

推论 设三个非零向量，其中没有两个共线，则三者共面的充要条件是：一个三阶行列式为零，这个三阶行列式的第一、第二、第三行的元素分别是三个向量的分量.

【例 3】 由公式(5)、(6)和(7)导出三阶行列式的三个性质.

解：设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_1, c_2, c_3\}$，$\boldsymbol{a}'=\{a_1',\ a_2',\ a_3'\}$. 于是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\{a_1+a_1',\ a_2+a_2',\ a_3+a_3'\}$，$m\boldsymbol{a}=\{ma_1,\ ma_2,\ ma_3\}$. 将(5)、(6)和(7)分别用分量表示.

(5)化成

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix},$$

即两行互换，行列式变号．(6)化成

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & a_2+a_2' & a_3+a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

即一个行列式可分成两个行列式的和．(7)化成

$$\begin{vmatrix} ma_1 & ma_2 & ma_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

即行列式的某一行乘上一个常数，等于行列式乘上同一常数．

【例 4】 化简$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$．

解 1：根据定义，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= [(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &= [(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}]+[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}]\ (\text{为什么？}) \\ &= (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ &= 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

解 2：利用推论 3 和公式(3)，可知

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &\quad= (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &\quad= (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &\qquad +(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &\quad= (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ &\quad= 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

解 3：利用分量：设 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_1, c_2, c_3\}$．则 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\{b_1+c_1, b_2+c_2, b_3+c_3\}$，$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}=\{c_1+a_1, c_2+a_2, c_3+c_3\}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\}$．

所以 $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$

$$=2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}).$$

【例 5】 已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 则

$$|(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|$$

在什么条件下等号方能成立？并推出此不等式的分量表示.

【证及解】 $|(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|$. 所以 $|(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$.

如果三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 两两垂直, 则

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$, 所以 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|$.

又 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$. 从而 $|(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|$.

用分量表示, 设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$, $\boldsymbol{c}=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}$. 利用 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\cdot|\boldsymbol{c}|^2$, 就有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2).$$

这是计算行列式的估值公式, 即阿达玛(Hadmard)行列式定理关于三阶的情况.

【例 6】 求顶点是 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $C(c_1,\ c_2,\ c_3)$ 和 $D(d_1,\ d_2,\ d_3)$ 的四面体的体积.

解: 所求体积 V 是以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体的体积的 $\frac{1}{6}$. 但是后者的体积 $=|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$. 由于 $\overrightarrow{AB}$

$=\{b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{c_1-a_1,\ c_2-a_2,\ c_3-a_3\}$，$\overrightarrow{AD}=\{d_1-a_1,\ d_2-a_2,\ d_3-a_3\}$. 所以

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}$$

的绝对值.

注意 在行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}$ 中，从第二行，第三行，第四行分别减去第一行，得到

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 & 0 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 & 0 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}.$$

所以 $V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}$ 的绝对值. 此与三角形的面积的计算公式完全类似.

*10·2 向量三重积

已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三向量，则 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 也是一个向量. 于是规定

定义 两向量先矢乘再与另一个向量矢乘，所得结果称为**向量三重积**.

现在推求 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 的计算公式. 先假设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，则 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{d}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$. 但 $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{d}$，因此 $\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面(图 2-52)，且 $\boldsymbol{e}$ 可以写作 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的线性组合(第五节(5))，即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}, \tag{A}$$

这里 λ 和 μ 是待定的数. 下面来确定它们的数值. 任取一点为原点建立直角坐标系使 x 轴与 $\boldsymbol{a}$ 平行, xy 面与 $\boldsymbol{b}$ 平行, 然后再定 z 轴. 于是得到

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k},$$

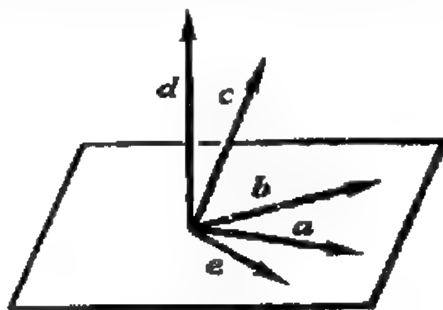


图 2-52

所以
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j})$$
$$=a_1b_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})=a_1b_2\boldsymbol{k},$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(a_1b_2\boldsymbol{k})\times(c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k})$$
$$=a_1b_2c_1\boldsymbol{j}-a_1b_2c_2\boldsymbol{i}. \tag{B}$$

由(A)式可见(B)式的右端必须改作 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的线性组合,即有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-(b_1c_1+b_2c_2)(a_1\boldsymbol{i})+a_1c_1(b_1\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j})$$
$$=-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}.$$

因此 $\lambda=-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$, $\mu=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$,于是有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.\text{[注]} \tag{9}$$

如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 则(9)显然成立; 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$, 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,可令 $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$, 代入(9)式两端都得零向量,故仍成立.

在向量三重积中,最重要的是注意连乘次序.现在计算 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$: 由 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, 故得

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}). \tag{10}$$

由公式(9)和(10),即得向量三重积的分解规则:

定理5 向量三重积等于三个向量中的一个向量(括弧内的)乘以其它二者的数量积,减去括弧中的另一向量乘以其它二者的数量积.

【例7】 设有三个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$, 其中 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不垂直. 推导 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 成立的充要条件.

解: 利用公式(9)和(10),即得

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

所以

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}). \tag{*}$$

[注] 如果设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$ 经过计算可直接证明公式(9),读者试自行补出.

由第八节例 4 知：此等式成立的充要条件是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线.

注意 (*)也可写作 $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

*【例 8】 用向量三重积的分解规则证明：

$$((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})^2.$$

并且推出关于附属行列式的一个定理.

【证及解】 利用分解公式(9)，可得

$$\begin{aligned}((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\\&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\{[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}]\boldsymbol{a}-[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}]\boldsymbol{b}\}\\&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\{[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}]\boldsymbol{a}\}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\}\\&=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})^2.\end{aligned}$$

由第九节例 8 知：$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=C_1\boldsymbol{i}+C_2\boldsymbol{j}+C_3\boldsymbol{k}$.

所以
$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\B_1 & B_2 & B_3\\C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix},$$

又
$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix},$$

利用本题的结论，则得

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\B_1 & B_2 & B_3\\C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}.$$

此即附属行列式的一个性质.

习 题 2·10

1. 推求：(1) $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$；(2) $(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}+\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$.
2. 化简：(1) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$；(2) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.
3. 已知三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$. 其中 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$, 又 $\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}=\frac{\pi}{6}$, 且 $|\boldsymbol{a}|=6$, $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=3$. 求 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$.
4. 求证：三个向量 $m\boldsymbol{b}-n\boldsymbol{c}$, $n\boldsymbol{c}-l\boldsymbol{a}$, $l\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}$ 必共面.

5．说明下列三个向量所处的位置：

(1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$；

(2) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$；

(3) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$.

6．设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\},\ \boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，求 $((l_1\boldsymbol{a}+m_1\boldsymbol{b}),(l_2\boldsymbol{a}+m_2\boldsymbol{b}),(l_3\boldsymbol{a}+m_3\boldsymbol{b}))$.

7．求证：$\boldsymbol{a}=\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\},\ \boldsymbol{b}=\left\{\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{-1}{3}\right\},\ \boldsymbol{c}=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right\}$ 形成两两垂直的单位向量组，且成右手系.

8．求四点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3),B(b_1,\ b_2,\ b_3),C(c_1,\ c_2,\ c_3),D(d_1,\ d_2,\ d_3)$ 共面的充要条件.［提示：$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$ 共面.］

9．如果 $|\boldsymbol{a}|=1,\ |\boldsymbol{b}|=2,\ \widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}=60^\circ$．求证 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

*10．推证三阶行列式的一个性质：如果把一行加到另一行上去，则行列式的值不变.

［提示：先证 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$.］

*11．已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面，则任一向量 $\boldsymbol{r}$ 可以分解为

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

［提示：根据第五节(10)分别用 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 去数乘 $\boldsymbol{r}$，即可定出 p、q、r.］

*12．分解已知向量 $\boldsymbol{b}$ 为两个向量，其中一个平行于已知向量 $\boldsymbol{a}$；而另一个则垂直于向量 $\boldsymbol{a}$.

［提示：于公式(9)中令 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，再移项.］

*第十一节　多向量的乘法

多个向量的乘法可以转化为三个向量的乘法．先来计算四个向量的乘法.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]\\&=\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})]=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}. \qquad (1)$$

这个公式叫拉格朗日公式或拉普拉斯(Laplace)公式.

又 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{c}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d}]-\boldsymbol{d}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$, 即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}. \qquad (2)$$

同理

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{a}. \qquad (3)$$

由(2)及(3)得

推论 $(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$.

【例 1】 如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}=a^4\boldsymbol{b}$.

【证】 由第十节(9)知:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=-a^2\boldsymbol{b}.$$

用 $\boldsymbol{a}$ 矢乘等式两端则得:

$$\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]=-a^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=a^2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

再重复运算一次,得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}\\ &=a^2[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})]\\ &=a^2[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]=a^4\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$ ■

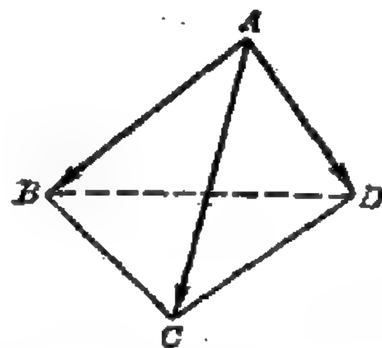


图 2-53

*【例 2】 已知一个正四面体 $ABCD$ 的棱长是 a, 利用公式 (1) 推求它的两个面的夹角.

解: 两向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 及 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ 分别在 ABC 面的垂线上及 ABD 面的垂线上(图 2-53). 如果所求的夹角 θ 是锐角, 则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$, 又 $|\boldsymbol{a}|=a^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$, $|\boldsymbol{b}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$, 故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\\ &=(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})-(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})\\ &=a^2\times\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\times\frac{a^2}{2}=\frac{a^4}{4}.\end{aligned}$$

从而得 $$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}=\frac{1}{3},$$

所以 $$\theta=\arccos\frac{1}{3}.$$

习　题　2·11

1．求证：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{a}$.

2．求证：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$.

3．求证：(1) $\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}]=0$;

(2) $\boldsymbol{b}\cdot[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}]=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta$，这里 $\theta=\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}$.

4．求证：$\boldsymbol{a}\times[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})]=\boldsymbol{0}$.

*5．求证：$\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})$，并推出 $\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{b}\times[\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{e})]\}$.

第十二节　向量方程的概念

和中学代数里的方程一样，我们将含有未知向量的等式叫向量方程，后面研究图形时将用到它．例如 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=l$，其中 $\boldsymbol{a}$ 是已知向量，$\boldsymbol{x}$ 是未知向量，l 是常数．这就是一个向量方程．今举例说明其解法．

【例 1】　试解向量方程组 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=l$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$．其中 l 是常数，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{b}$.

解：设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，$\boldsymbol{x}=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$．由于 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{b}=0$，故 $b_1=0$．$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，化成 $\boldsymbol{i}\times(x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k})=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，即 $x_2\boldsymbol{k}-x_3\boldsymbol{j}=b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$．比较等式两端，得 $x_2=b_3$，$x_3=-b_2$．将 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=l$ 化成 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=l$，将 x_2，x_3 代入上式，得 $x_1=\frac{1}{a_1}(l+a_3b_2-a_2b_3)$，于是即求得 $\boldsymbol{x}$.

*【例 2】 (1)试解向量方程 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=l$. 其中 $\boldsymbol{a}\neq 0$, l 是常数; (2)试解向量方程组 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=l$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=m$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=n$. 其中 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{c}\neq 0$; $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\neq 0$; l、m、n 是常数。

解: (1) 设 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{x}=\{x_1, x_2, x_3\}$. 则有 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=l$, 这是三元一次方程, 是不定方程, 它的几何意义下面将要介绍.

(2) 和(1)一样, 可得三个三元一次方程, 且系数行列式不等于零, 故有唯一解.

上述是将向量方程转化成代数方程来解的, 下面再直接来解向量方程. 将 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=l$ 及 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=m$ 分别乘以 m 及 l 后把两式相减, 即得 $(m\boldsymbol{a}-l\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{x}=0$, 所以 $\boldsymbol{x}\perp(m\boldsymbol{a}-l\boldsymbol{b})$; 同理 $(n\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{x}=0$, 所以 $\boldsymbol{x}\perp(n\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{c})$. 故 $\boldsymbol{x}$ 必与 $(m\boldsymbol{a}-l\boldsymbol{b})\times(n\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{c})$ 共线, 即 $\boldsymbol{x}=\lambda[(m\boldsymbol{a}-l\boldsymbol{b})\times(n\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{c})]=\lambda m[l(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+m(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+n(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]$, 这里 λ 是待定系数. 下面确定 λ 的值: 以 $\boldsymbol{b}$ 数乘上式两端, 则得 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=\lambda m[l(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+m(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+n(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\cdot\boldsymbol{b}$. 又因为 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=m$, 故有 $\lambda m=\dfrac{1}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}$, 从而得到

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}[l(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+m(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+n(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})].$$

习 题 2·12

1. 试解 $a_1\boldsymbol{x}+b_1\boldsymbol{y}=\boldsymbol{k}_1$, $a_2\boldsymbol{x}+b_2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{k}_2$, 这里 a_1、b_1、a_2、b_2 是常数, 且 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$; $\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_2$ 是已知向量.
2. 试解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=l$. 这里 $\boldsymbol{a}$ 是已知非零向量, l 是常数, 且 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.
3. 求与 z 轴垂直, 且适合 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=l$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=m$ 的向量 $\boldsymbol{x}$. 这里 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是已知非零向量, 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{k})\neq 0$.

*4. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 都是已知向量, 且 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 垂直; $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不垂直. 试解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\alpha$(常数), $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}$.

本 章 提 要

1. 向量的基本概念

(1) 特征 具有大小和方向.

(2) 表示法

(i) 几何表示　用有向线段

位置向量　始点是原点，终点是 P，记作 $\overrightarrow{OP}$ 或 $\boldsymbol{P}$，长度记作 $|\overrightarrow{OP}|$ 或 p；

自由向量　始点是 P_1，终点是 P_2，记作 $\overrightarrow{P_1P_2}$，或 $\boldsymbol{p}$，长度记作 $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ 或 $|\boldsymbol{p}|$ 或 p.

(ii) 代数表示　用分量(坐标)

位置向量　设 $P(x, y, z)$，则 $\boldsymbol{P}=\{x, y, z\}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$；

自由向量　设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，则 $\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$.

(3) 特殊向量

(i) 相等向量($\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$)，相反向量($\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{a}$)；

(ii) 零向量($\boldsymbol{0}$)，单位向量($\boldsymbol{a}^\circ$).

2. 向量的线性运算

设有向量集合 V 及实数集合 R. 规定两种运算叫线性运算。

(1) 向量加法　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in$[注]$V$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in V$；

(2) 数与向量乘法　$\boldsymbol{a}\in V$，$m\in R$，则 $m\boldsymbol{a}\in V$. 上述运算适合下列基本性质：

(i) 加法交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(ii) 加法结合律　$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$；

(iii) 减法可能　若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in V$，则有 $\boldsymbol{x}\in V$，满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. 记作 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；

(iv) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

(v) $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(vi) 乘法结合律　$m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a}$；

(vii) 加法和乘法分配律　$(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$,

$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b};$$

(viii) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

在高等代数里，V 叫做一个向量空间. 同时还有如下性质：

(i) 三角形不等式　$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

[注] “$\in$”是属于记号。

(ii) 消去律　设 $m\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，则 $m=n$，

设 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}(m\neq 0)$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

(iii) 多个向量的加法；多边形规则.

3．向量的线性关系

(1) 两个非零向量共线的判定；

(2) 三个不同点共线的判定；

(3) 三个非零向量共面的判定；

(4) 四个不同点共面的判定；

(5) 四个非零向量成线性关系；

(6) 平面内向量的分解；

(7) 空间向量的分解.

4．两个向量的数乘法

(1)定义及记法；(2) 运算律：(i)交换律；(ii)结合律；(iii)分配律；(iv)消去律不成立.

(3)几个性质：(i)两向量的夹角；(ii)向量的长度；(iii)一个向量在另一向量上射影的大小；(iv)两个非零向量垂直的判定．(4)分量表示.

5．两个向量的矢乘法

(1)定义及记法；(2)运算律：(i)反交换律；(ii)结合律；(iii)分配律；(iv)消去律不成立.

(3)几个性质：(i)两个向量的夹角；(ii)两个向量所构成的平行四边形的面积；(iii)两个非零向量平行的判定．(4)分量表示.

6．三向量的数乘法

(1)定义及记法；(2)运算规则；

(3)几个性质：(i)三个向量所构成的平行六面体的体积；(ii)右手系的判定；(iii)三个非零向量中没有两个共线时，它们共面的判定.

复 习 题 二

1．已知正六边形 $OABCDE$，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{A}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{B}$．求 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ 和 $\overrightarrow{OE}$.

2．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$．求三条中线向量.

3．已知空间四边形 $ABCD$．又 AC 的中点为 M，BD 的中点为 N．求证 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

4. 已知空间四边形 $A_1A_2A_3A_4$，且 $\boldsymbol{A}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_1+\mu_i\boldsymbol{e}_2+\nu_i\boldsymbol{e}_3$，这里 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 是三个不共面的向量．求 $\overrightarrow{A_1A_2}$，$\overrightarrow{A_2A_3}$，$\overrightarrow{A_3A_4}$ 和 $\overrightarrow{A_4A_1}$．

5. 求证三角形三个顶点的位置向量的和等于三边中点的位置向量的和．

6. 以四面体的四个顶点为始点，对面重心为终点，作四个向量．求证它们的和必是零．这个结果说明什么几何性质？

7. 在三角形内求一点，以此点为始点，作各顶点的位置向量，使其和是零向量，并推广到多角形上讨论．

8. 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$．(1)求 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\varepsilon\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ $(\varepsilon=\pm1)$ 成立的充要条件；(2)求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 成立的充要条件．

9. 已知四边形 $ABCD$ 的顶点的位置向量．求 (1) 它是平行四边形的充要条件；(2)它是矩形的充要条件；(3)它是正方形的充要条件．

10. 在三角形 ABC 的三边 BC、CA、AB 上分别取 L、M、N 三个点．求三向量 $\overrightarrow{AL}$、$\overrightarrow{BM}$、$\overrightarrow{CN}$ 首尾衔接成一个三角形的充要条件．

11. 求证第四节例 2 中的立方体 $OANB-CMPL$ 的六棱中点 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5 和 M_6 必共面．

12. 设 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，$\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}=\frac{\pi}{6}$．求 $\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}$．

13. 求证：由任意一点到三角形三顶点的距离平方和的四倍等于由该点到各边中点所作成的线段平方和的四倍加上各边的平方和．

14. (1)设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$．求 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2)设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是三个向量，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，又 $a=1$, $b=2$, $c=3$，求 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．

15. 如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是两两垂直的已知向量．求 $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}$ 的长度，这里 p, q, r 是已知数．

16. 求证：多角形一边的平方等于其它各边的平方和加上每两边及其夹角(取各边同方向所夹的角)的余弦乘积之和的二倍．

17. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $BC=14$, $CA=15$, $AB=13$．试求(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$；(2)$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$．

18. 求证：三角形的三条高线共点(此点叫垂心)．

19. 求证：菱形的两条对角线互相垂直．

*20. 已知等腰三角形两腰上的中线互相垂直，求顶角. [提示：用三边所作的向量写出中线向量. 顶角是 A，底角是 B、C，推出 $\cos A = \frac{2\sin^2 A}{\sin^2 B}$.]

*21. 两个非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ 及 $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ 共线的充要条件是：矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ 的秩是 1.

[提示：参看附录第二节.]

22. 试定一个单位向量，使之垂直于两个向量 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 和 $\{b_1, b_2, b_3\}$.

23. 一个质点的速度由两个速度 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 合成，它们的夹角是 α. 如果两个速度改为 $a\boldsymbol{u}$ 和 $a^{-1}\boldsymbol{v}(a>1)$，且合成的大小不变. 求证：$a\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$，再证这两个合成速度的交角的正切是 $\frac{(a-a^{-1})\sin\alpha}{2+(a+a^{-1})\cos\alpha}$.

*24. 已知两条直线上各有三个点 A、B、C 和 A'、B'、C'. 如果 $BC /\!/ B'C'$，$CA /\!/ C'A'$，则 $AB /\!/ A'B'$. [提示：先证恒等式

$$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}')\times(\boldsymbol{B}'-\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}')\times(\boldsymbol{C}'-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}')\times(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{B})$$
$$=(\boldsymbol{B}'\times\boldsymbol{C}'+\boldsymbol{C}'\times\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{A}'\times\boldsymbol{B}')-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0}.]$$

25. 设 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{n}$ 是任意向量. 求证：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}$ 必共面.

26. 已知 $\triangle ABC$ 三边的中点是 A'、B'、C'. 又 P 是任意点. 求证：$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}')+(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}')+(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}')=0$.

27. 举例说明第十节例 1 中的条件不是共面的必要条件.

28. 求证：

$$((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}), (\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{f}))=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$$
$$-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$$
$$=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e})(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{f})(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$$
$$=(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})-(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}).$$

29. 求证：

$$((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p}), (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{q}), (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}))+((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{q}), (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}), (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{p}))$$
$$+((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}), (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{p})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{q}))=0.$$

*30. 求证：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$，并说明它的几何意义。

思考题二

1. 已知三角形三个顶点的位置向量，又知由三边高线所作的向量．先求垂心 H 和外心 K 的位置向量，并证重心 G 位于 H 和 K 的联线上，且内分这两点的比为 2:1．
2. 如果一个四面体的三对对棱都垂直，则称**直交四面体**．
   (1) 四面体如有两对对棱垂直，则必是直交四面体；
   (2) 四面体为直交四面体的充要条件是它的三对对棱平方和相等；
   (3) 设四面体的一个顶点和对面三角形的垂心的联线与此平面相垂直，则必是直交四面体；
   (4) 四面体是直交四面体的充要条件为它的三对对棱的**中位线**(对棱中点所作的线段)相等．
   (5) 四面体的三条高线(顶点到对面的垂直线段)如果共点，则必是直交四面体，且第四条高线也过该点(此点叫**四面体的垂心**)．
3. 两个三角形的顶点有一一对应的关系． 如果从第一个三角形的三个顶点到第二个三角形的对应边作垂线，而三垂线共点，则由第二个三角形的三个顶点到第一个三角形的对应边作垂线也必共点．已知三个三角形，如果第一个和第二个，第二个和第三个都有上述性质，则第一个和第三个也必有同样的性质(传递性)．
4. 已知三点 A、B 和 C． 求证霍恩利希和霍拉夫卡(H. Hornrich and E. Hlawka)不等式
   $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}|+|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}|\geq|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}|+|\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$．

第三章

平　　面

在平面解析几何里，最简单的曲线是直线，它的方程是二元一次方程．从代数角度看，它在空间解析几何里有两方面的推广，一方面是平面(用一个三元一次方程表示)，另一方面就是空间直线(用两个三元一次方程表示)．本章首先利用向量和坐标两种工具建立平面的各种形式的方程，然后讨论点与平面以及两个平面间的位置关系和度量关系，最后讨论含参数的平面方程，也就是平面族的方程．学习本章时要结合平面解析几何中直线部分的相应内容来考虑．

第一节　平面方程的点法式和普遍式

1·1　平面方程的点法式

仿照平面解析几何中直线的法线的概念，我们规定空间解析几何中平面的法线的概念如下：

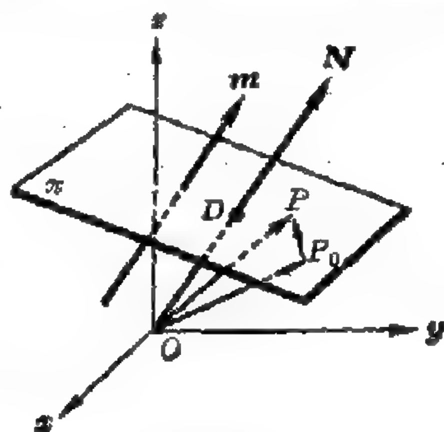


图　3-1

已知平面 π，过原点和平面 π 垂直的直线叫做它的法线．法线有两个相反的方向，现规定正方向如下：如果 π 不过原点，从原点向 π 作垂线，垂足记为 D，射线 OD 的方向就规定为法线的正方向(如图 3-1)；如果 π 过原点，法线的正方向可由第三个方向角 $\gamma<90°$ 规

定；如果 $\gamma=90°$，即 π 过 z 轴，则可由第二个方向角 $\beta<90°$ 规定；如果 $\beta=\gamma=90°$，即 π 与 yz 平面重合，则规定法线的正方向与 x 轴的正方向一致。

为了以后运用方便，我们规定两个概念如下：以原点为始点沿平面法线正方向所作的向量叫平面的*法线向量*，如图 3-1 中 $\overrightarrow{ON}$ 就是．凡与平面法线平行的非零向量叫平面的*法向量*，如图 3-1 中的 $\boldsymbol{m}$ 就是．我们要注意到平面法向量的始点是任意的，而它的方向与法线正方向可以相同，也可以相反．在图 3-1 中的 $\boldsymbol{m}$ 就与 $\overrightarrow{ON}$ 同向。

已知平面 π 的一个法向量 $\boldsymbol{m}$，又知它上面一个定点 P_0，于是 π 就可以看作是过 P_0 与 $\boldsymbol{m}$ 垂直的平面，也就是说，平面 π 由 P_0 及 $\boldsymbol{m}$ 唯一决定．因此平面可以看作适合以下条件的点的轨迹：它上面的任意一点与某一定点(也在平面上)所成的向量永远和某一常向量(平面的法向量)垂直．根据这一特征，我们来建立向量形式的平面方程．

设 P 是 π 上的任意一点，于是 $\overrightarrow{P_0P}$ 一定和 $\boldsymbol{m}$ 垂直，因此它们的数量积为零，即 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$．但 $\overrightarrow{P_0P}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0$，所以

$$\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=0,\quad \boldsymbol{m}\neq\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

这里要注意：$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}_0$ 是位置向量，$\boldsymbol{m}$ 是自由向量，并且 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{m}$ 是常向量，$\boldsymbol{P}$ 则是流动向量．

反之，如果 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{m}$ 是常向量，$\boldsymbol{P}$ 是流动向量，且适合(1)式，那末逆推回去，就得到 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$．这就说明了 P 点必在 π 上。

因此向量方程(1)就是 π 的方程，(1)叫做向量形式的平面方程的*点法式*．现在将它化为坐标形式：

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，$P(x, y, z)$，于是有

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\},$$

又设 $\boldsymbol{m}=\{a,\ b,\ c\}$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$, 则(1)可表成

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,\quad a^2+b^2+c^2\neq 0. \tag{2}$$

(2)叫做坐标形式的平面方程的点法式. 必须注意：这里 a, b, c 是平面的法线的一组方向数.

将上面的结果合并，得

定理1 过定点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, 以 a, b, c 为平面法线的一组方向数的平面方程的向量形式是(1), 坐标形式是(2).

注意 为简便起见，以后将平面方程(1)，简称为平面(1).

【例1】 求过 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 且法向量在 z 轴上的平面的方程.

解：取 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{k}$, 于是(1)可写为

$$\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=0.$$

化成坐标形式，即得

$$z-z_0=0.$$

【例2】 如果一个平面的法向量的三个方向角相等，且过定点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, 求此平面方程.

解：由第一章第三节例1知：法向量的三个方向角 α、β、γ 适合

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3},\quad \text{其中 } \varepsilon=\pm 1,$$

于是

$$\boldsymbol{N}^\circ=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}=\left\{\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3},\ \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3},\ \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

在此可取 $\boldsymbol{m}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$, 因此由(1), 得

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=0,$$

或

$$(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=0.$$

化成坐标形式，即

$$(x-x_0)+(y-y_0)+(z-z_0)=0.$$

【例 3】 求两点 $P_1(x_1, y_1, z)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的垂直平分面(中垂面)的方程。

解：设 P_1P_2 的中点是 $P_0\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$，又

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\},$$

取 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{P_1P_2}$，于是 P_1P_2 垂直平分面的方程是

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=0.$$

化成坐标形式，得

$$(x_2-x_1)\left[x-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]+(y_2-y_1)\left[y-\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\right]$$

$$+(z_2-z_1)\left[z-\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right]=0,$$

即

$$(x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y+(z_2-z_1)z$$

$$=\frac{1}{2}[(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)+(z_2^2-z_1^2)].$$

1·2 平面方程的普遍式

由(2)可得

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0.$$

如果令 $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$，则上式就可写为

$$ax+by+cz+d=0, \quad a^2+b^2+c^2\neq 0. \tag{3}$$

因此平面方程是三元一次方程。

反之，任何三元一次方程(3)都表示一个平面，下面就来

证明. 因为适合(3)的 x、y、z 必有无数组，今取一组(x_0, y_0, z_0)，则有

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0,$$

即

$$d=-(ax_0+by_0+cz_0),$$

将它代入(3)，即得

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0,$$

或

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

此即(2)式，故(3)式一定表示平面. a、b、c 是法线的一组方向数，或者说是一个法向量的三个坐标.

定理 2 平面坐标形式的方程是三元一次方程，反之，三元一次方程一定表示平面，且它的系数是平面法线的一组方向数.

由此可见，代数中的三元一次方程，在几何里就表示平面.

在(3)中，取动点(x, y, z)的位置向量是 $\boldsymbol{P}=\{x, y, z\}$，又取 $\boldsymbol{m}=\{a, b, c\}$，则(3)就化为

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}+d=0. \tag{4}$$

(3)及(4)分别叫做坐标形式和向量形式的平面方程的普遍式或一般式. (3)式与平面解析几何中直线方程的普遍式完全类似.

1·3 平面方程普遍式的讨论

已知平面(3)，现就它的系数是否为零来讨论它关于坐标轴的特殊位置.

1. 假如 $d=0$，则(3)就化为

$$ax+by+cz=0. \tag{5}$$

显然(0, 0, 0)适合(5)，因此平面(5)过原点.

2. 如 $c=0$, 则(3)化为

$$ax+by+d=0. \tag{6}$$

由于(6)的一个法向量的三个坐标是 a, b, 0; 而 $\boldsymbol{k}=\{0, 0, 1\}$, 显然

$$a(0)+b(0)+c(1)=0.$$

故此平面的法向量与 z 轴垂直, 也就是说平面平行于 z 轴.

同理, 当 $b=0$ 时, (3)化为

$$ax+cz+d=0. \tag{7}$$

当 $a=0$ 时, (3)化为

$$by+cz+d=0. \tag{8}$$

(7)与(8)分别表示平行于 y 轴及 x 轴的平面, 或者说垂直于 zx 面及 yz 面的平面.

3. 如 $b=c=0$, 则(3)化为

$$ax+d=0. \tag{9}$$

(9)式所表示的平面, 既垂直于 xy 面又垂直于 xz 面, 故必垂直于两个坐标平面的交线——x 轴, 或说与 yz 面平行.

同理, 当 $a=c=0$ 时, (3)化为

$$by+d=0. \tag{10}$$

当 $a=b=0$ 时, (3)化为

$$cz+d=0. \tag{11}$$

它们分别表示垂直于 y 轴及 z 轴的平面. 或分别平行于 xz 面与 xy 面的平面.

4. 如 $a=d=0$, 则(3)化为

$$by+cz=0. \tag{12}$$

(12)表示通过原点且与 x 轴平行的平面, 也就是过 x 轴的平面.

同理, 当 $b=d=0$ 时, 则(3)化为

$$ax+cz=0. \tag{13}$$

当 $c=d=0$ 时，(3)化为

$$ax+by=0. \tag{14}$$

(13)及(14)分别表示过 y 轴及 z 轴的平面.

5. 如果 $b=c=d=0$，而 $a\neq0$ 时，则(3)化为

$$ax=0 \quad 或 \quad x=0. \tag{15}$$

此即 yz 面.

同理，当 $c=a=d=0$，而 $b\neq0$ 时，则(3)化为

$$by=0 \quad 或 \quad y=0. \tag{16}$$

当 $a=b=d=0$，而 $c\neq0$ 时，则(3)化为

$$cz=0 \quad 或 \quad z=0. \tag{17}$$

(16)及(17)分别表示 zx 面及 xy 面.

归纳起来，有

定理3 在平面方程的普遍式中，如果常数项不是零，且缺某一个变数，则平面一定平行于该变数所对应的坐标轴；如果缺某两个变数，则平面一定平行于该两变数所对应的坐标面.

定理4 在平面方程的普遍式中，如果常数项是零，且缺某一个变数，则平面一定过该变数所对应的坐标轴；如缺两个变数，则平面一定是这两个变数所对应的坐标面.

*【例 4】 求证 $yz-zx+x-y=0$ 表示两个平面，并说明它们的位置特征，再将它们化为向量形式.

解：原式左端可分解成两个一次因式的积，即

$$(x-y)(1-z)=0.$$

因此原方程表示两个平面：

$$x-y=0 \quad 及 \quad z-1=0.$$

$x-y=0$ 表示过 z 轴的平面，且它与 xy 面的交线是 xy 面上的直线：

$$x-y=0.$$

$z-1=0$ 表示与 z 轴垂直的平面，且它与 z 轴的交点是 $(0, 0, 1)$。

$x-y=0$ 的向量形式是 $(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{P}=0$，

$z-1=0$ 的向量形式是 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{P}-1=0$。

习 题 3·1

1. 求过点 $(1, 1, 1)$ 且法向量分别是 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的平面方程的点法式.
2. 求过点 $(1, 1, 1)$ 且法向量分别是 $\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 的平面方程的点法式。
3. 化下列向量形式的普遍式为坐标形式，并说明它们的位置。

   (1) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{P}=1$;　　(2) $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{P}=1$;　　(3) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{P}=1$;

   (4) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{P}=0$;　　(5) $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{P}=0$;　　(6) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{P}=0$.
4. 化下列平面方程的普遍式为坐标形式，并说明它们的位置。

   (1) $(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{P}=1$;　(2) $(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{P}=1$;　(3) $(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{P}=1$;

   (4) $(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{P}=0$;　(5) $(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{P}=0$;　(6) $(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{P}=0$.
5. 化下列坐标形式的平面方程的普遍式为向量形式。

   (1) $x+y+z=1$;　　　　(2) $x+y+z=0$.
6. 求证下列各方程都表示两个平面，并说明它们的位置.

   (1) $x^2-1=0$;　　(2) $x^2-y^2=0$;　　(3) $x^2+yz+zx+xy=0$;

   *(4) $2x^2-6y^2-12z^2+18yz+2zx+xy=0$.

   [提示：可用待定系数法或其它方法分解成两个一次因式的积.]
7. 设方程 $ax+by+cz+d=0$ 中的系数 a、b、c、d 适合关系式 $a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta=0$，其中 α、β、γ、δ 均是非零常数，问此平面的位置有什么特征?
8. 设方程 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{P}+d=0$ 中的 $\boldsymbol{N}$ 和 d 适合关系式

   $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N}^0+d=0$，问这平面位置有什么特征?

*9. 将方程 (6) 化为向量形式的平面方程的点法式. 再证明 (6) 所表示的平面和 z 轴平行.

*10. 将方程 (9) 化为向量形式的平面方程的点法式. 再证明 (9) 所表示的平面和 x 轴垂直。

第二节　平面方程的三点式和参数式

2·1　平面方程的三点式

在立体几何里，我们知道三个不共线的点 $P_r(x_r, y_r, z_r)$ $(r=1, 2, 3)$可以唯一确定一个平面．现在推求通过三点的平面方程．设

$$ax+by+cz+d=0 \tag{A}$$

为所求的平面，由于它过 P_r，故有

$$ax_r+by_r+cz_r+d=0 \quad (r=1,\ 2,\ 3). \tag{B_r}$$

于是(A)和(B_r)四个方程对于 a、b、c、d 应有非零解（见附录第三节），故得

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

将(1)按第一行展开（参看附录第一节），得

$$x\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+z\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

由于 P_1、P_2、P_3 三点不共线，由第二章第九节例 8 可知：(2)中 x、y、z 的系数至少有一个不是零，因此(2)或(1)即为所求．也可利用向量来推求这个平面方程．

设 $\boldsymbol{P}\{x, y, z\}$ 为所求平面上任一点的位置向量. 由于 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_1$ 既不是零向量，且没有两个共线，故共面的充要条件是

$$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_1)=0. \tag{3}$$

现将(3)式化简，得

$$[(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)\times(\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_1)]\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)=0,$$

即 $$[(\boldsymbol{P}_2\times\boldsymbol{P}_3)+(\boldsymbol{P}_3\times\boldsymbol{P}_1)+(\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2)]\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)=0.$$

移项得

$$(\boldsymbol{P}_2\times\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_3\times\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2)\cdot\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{P}_3). \tag{4}$$

于是

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}_2\times\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_3\times\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_3&y_3&z_3\\x_1&y_1&z_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}\end{aligned}$$

就是平面法线上的一个向量，将(4)写成分量形式，即得(2).

将上面的结果合并，得

定理 1 过三个不共线的点 $P_r(x_r, y_r, z_r)$ $(r=1, 2, 3)$ 的平面方程的坐标形式是(1)，向量形式是(4).

定义 方程(1)称为坐标形式的平面方程的三点式；(4)式称为向量形式的平面方程的三点式。

由(1)可得到

推论 1 若四个点 $P_r(x_r, y_r, z_r)$ $(r=1, 2, 3, 4)$ 中没有三点共线，则共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1&1\\x_2&y_2&z_2&1\\x_3&y_3&z_3&1\\x_4&y_4&z_4&1\end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

推论 2 过 $(a, 0, 0)$，$(0, b, 0)$，$(0, 0, c)$ 三点的平面方程的坐标形式是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{6}$$

其中 $$a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0.$$

【证】 将$(a, 0, 0)(0, b, 0)(0, 0, c)$分别代入(2)，得

$$x\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ b & 0 & 1\\ 0 & c & 1\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & c & 1\end{vmatrix}$$

$$+z\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & b & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=0,$$

化简即得(6)。▌

定义 方程 (6) 称为坐标形式的平面方程的截距式，而 a、b、c 分别叫做平面在三坐标轴上的截距。

2·2 平面方程的参数式

如果已知平面 π 上的一定点 P_0 及过 P_0 的两个不共线的定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，现在推求平面 π 的方程. 在 π 上任取一点 P，作 $\overrightarrow{P_0P}$，则由分解定理得

$$\overrightarrow{P_0P}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b},$$

又 $$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P},$$

所以 $$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}. \tag{7}$$

这里 u、v 随 P 的改变而改变. 且

$$-\infty<u,\ v<+\infty.$$

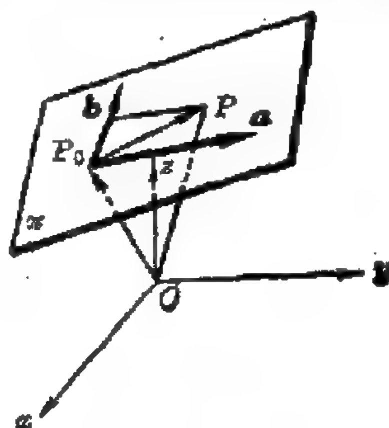


图 3-2

在 $Oxyz$ 中，设 $\boldsymbol{P}_0=\{x_0,\ y_0,\ z_0\}$，$\boldsymbol{P}=\{x,\ y,\ z\}$，$\boldsymbol{a}=\{a_1,$

$a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$，于是(7)即化成

$$\begin{cases} x=x_0+a_1u+b_1v \\ y=y_0+a_2u+b_2v \\ z=z_0+a_3u+b_3v \end{cases} \quad (-\infty<u, v<+\infty). \tag{8}$$

若将(8)中的 u、v 消去，就可化成普遍式(其过程留给读者补上)．于是得

定理2 已知定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 和过 P_0 的两个不共线的定向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$。则所定平面方程的向量形式是(7)；坐标形式是(8)。

方程(7)和(8)分别叫做向量形式和坐标形式的平面方程的参数式，其中 u、v 叫做参数．

上面的参数式是由 $\boldsymbol{P}_0$ 及两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 决定的．此外，还可利用不共线的三点 P_1、P_2、P_3 来确定平面方程的参数式． 取 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{P_1P_2}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{P_1P_3}$，于是(7)可以写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{P}_1+\lambda_2\overrightarrow{P_1P_2}+\lambda_3\overrightarrow{P_1P_3} \\ &=(1-\lambda_2-\lambda_3)\boldsymbol{P}_1+\lambda_2\boldsymbol{P}_2+\lambda_3\boldsymbol{P}_3 \\ &=\lambda_1\boldsymbol{P}_1+\lambda_2\boldsymbol{P}_2+\lambda_3\boldsymbol{P}_3.\end{aligned}$$

这里 λ_1、λ_2、λ_3 是参数，且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$．于是有

$$\boldsymbol{P}=\frac{\lambda_1\boldsymbol{P}_1+\lambda_2\boldsymbol{P}_2+\lambda_3\boldsymbol{P}_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

$$(-\infty<\lambda_1、\lambda_2、\lambda_3<+\infty, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1). \tag{9}$$

化成坐标形式，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \\ y=\dfrac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \\ z=\dfrac{\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \end{cases} \quad \begin{pmatrix}-\infty<\lambda_1、\lambda_2、\lambda_3<+\infty, \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\end{pmatrix}. \tag{10}$$

即有

定理3 已知三个不共线的点 P_1、P_2、P_3，则所定平面方程的向量形式是(9)；坐标形式是(10)。

方程(9)和(10)仍分别叫做向量形式和坐标形式的平面方程的**参数式**。

2·3 三条件确定一平面

许多几何问题可用如下方式来描述：从某种元素的无限集合中求出适合若干个已知条件的一个或若干个元素．例如就空间平面的无限集合来说，如果给定三个不共线的点，就有唯一确定的平面通过这三个点．现在就来研究确定平面的问题．我们知道：平面方程的任何形式都可以化为普遍形式

$$ax+by+cz+d=0,\ a^2+b^2+c^2\neq 0. \tag{A}$$

在此只要 a、b、c、d 四个数已知时（实际上，只要当 $a:b:c:d$ 已知时），这个平面就能够唯一确定，它们都是参数．例如 $a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$ 和 $a=2$，$b=4$，$c=6$，$d=8$ 所确定的是同一平面．故 a、b、c、d 不是独立参数，或者说，方程(A)仅含有三个独立参数．我们把联系平面方程独立参数问题的一个关系式称为"一个条件"．由于两个条件可以确定两个独立参数，由此可得一个重要结论：三条件确定一平面．这和平面解析几何里"两条件确定一直线"完全一样．

【例1】 求适合以下条件的平面方程：它的三个截距的和与积都是6，且每两个截距之积的和是11。

解：设 a、b、c 是所求平面的截距，则

$$a+b+c=6,\ abc=6,\ bc+ca+ab=11.$$

解之，得

$$a=1,\ b=2,\ c=3;\quad a=1,\ b=3,\ c=2;$$
$$a=3,\ b=1,\ c=2;\quad a=3,\ b=2,\ c=1;$$
$$a=2,\ b=3,\ c=1;\quad a=2,\ b=1,\ c=3.$$

代入(6)中即得所求的平面方程.

【例 2】 求过定点且与两条不平行的直线都平行的平面方程.

解：设定点是 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，现于两条不平行的直线上分别取向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$. 显然，$\boldsymbol{a}\not\parallel\boldsymbol{b}$. 现设动点为 $P(x, y, z)$，则三向量 $\overrightarrow{P_0P}$、$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 必共面。故得所求方程为 $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0,\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=0$，化成坐标形式，即为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$$

注意 此题也可改为：求过定点且与两个不共线的向量都平行的平面方程.

2·4 平面的作图

在第一章第一节直角坐标系的作图基础上，就平面的不同位置来讨论它们的作图，这对后面二次曲面的作图问题将起很大作用.

1. 仅与一个坐标轴相交的平面，此时方程是

$$x=a \quad (11);\qquad y=b \quad (12);\qquad z=c \quad (13).$$

它们的图形作法如下：作点 $A(a, 0, 0)$，然后过 A 分别作 y 轴和 z 轴的平行线，用这两个平行线作一矩形即为(11)的图形(见图 3-3). 仿照(11)的作法即可作出(12)和(13)的平面(见图 3-4 和图 3-5)，所作的平面通常用一个平行四边形表示。

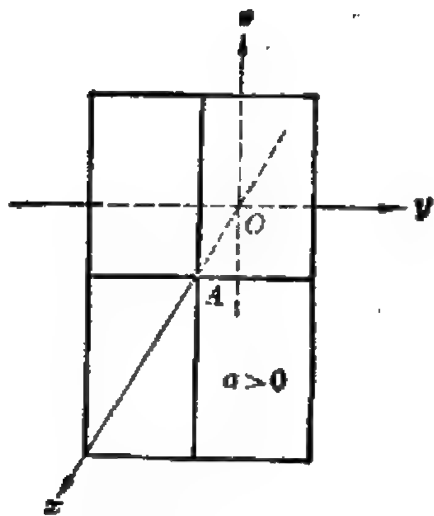


图 3-3

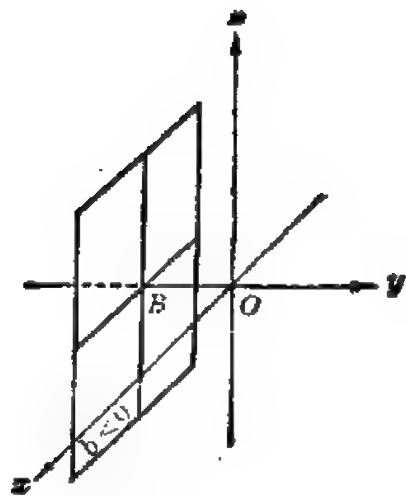


图 3-4

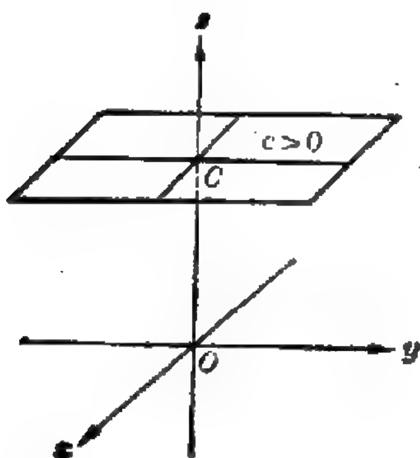


图 3-5

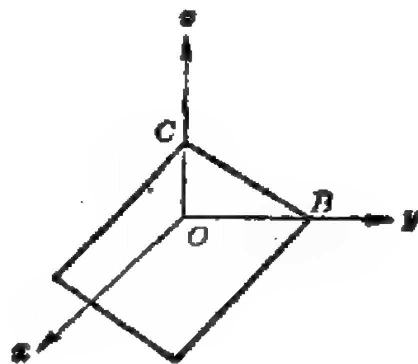


图 3-6

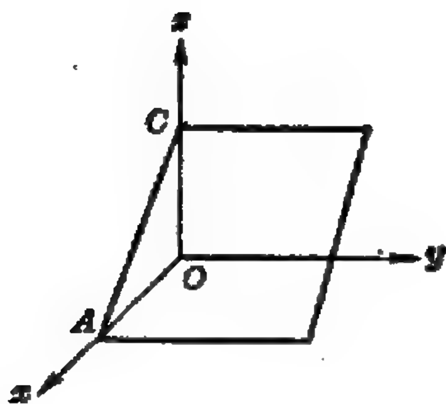


图 3-7

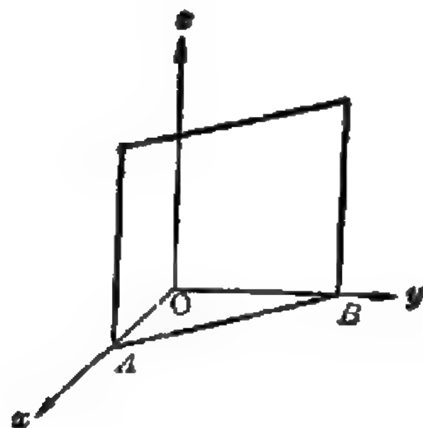


图 3-8

2．与两个坐标轴相交的平面，此时方程是

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (14);\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1 \quad (15);\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (16).$$

它们的图形作法是：先作(14)的图．作点 $B(0,\ b,\ 0)$ 和点 $C(0,\ 0,\ c)$．然后过 B 和 C 作 x 轴的平行线，用此两条平行线和 BC 作一平行四边形，即为(14)的图形(见图 3-6)．仿照(14)的作法即可作出(15)和(16)的图形(见图 3-7 和图 3-8)．

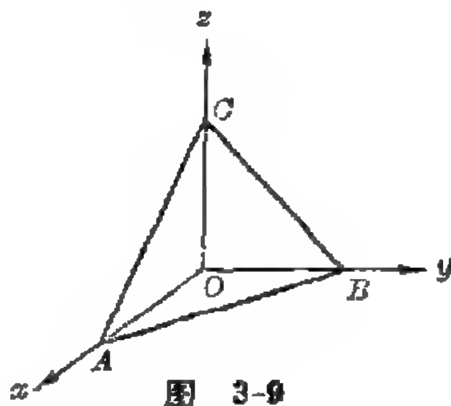


图 3-9

3．与三个坐标轴都相交的平面，此时方程是 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$．其图形的作法是：先作 $A(a,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ b,\ 0)$ 和 $C(0,\ 0,\ c)$，则 BC、CA、AB 为边的三角形即表示这平面(见图 3-9)．

4．过原点但不过三坐标轴的平面，在这平面上先作过原点的两条直线，然后作一平行四边形，即表示这平面．

5．过一坐标轴的平面，先过原点作这平面上一直线，然后以这直线和坐标轴作一平行四边形即为所求的平面．

习 题 3·2

1．下列各平面与坐标系的相关位置有什么特点？并作图．

(1) $x+y-2=0$;　(2) $2x-3y=0$;　(3) $y-z=1$;

(4) $x+y+z=1$;　(5) $x+y+z=0$;　(6) $z^2-3z+2=0$.

2．说明下列各方程在平面解析几何里和在空间解析几何里各表示什么图形？

(1) $x=a$(a 常数);　(2) $ax+by+c=0(a^2+b^2\neq0)$.

3．适合下列条件的平面的普遍方程有什么特征？

(1) 过原点;　(2) 平行于坐标轴;　(3) 包含坐标轴;

(4) 平行于坐标面;　(5) 坐标面.

4. 求过(1, 0, 1), (2, 1, 0), $\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$三点的平面方程. 并判断点$\left(1, 1, \frac{1}{3}\right)$是否在这平面上?

5. 过定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, (1)求与 yz 面平行的平面的方程; (2)求过 x 轴的平面的方程.

6. 已知两定点 P_1 及 P_2. 过 P_1 及 P_2 分别作平面与 P_1P_2 垂直. 求它们的方程.

7. 由原点到定平面作法线,已知垂足的坐标,求此平面的方程.

8. 求过定点 $A(a_1, a_2, a_3)$ 且与定平面 $(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{P}+d=0$ 平行的平面方程.

9. 求过两定点且与已知向量平行的平面方程(两定点联线与已知向量不平行). [提示: 用数量三重积.]

10. 求过两定点且与已知平面垂直的平面方程(两定点联线与已知平面不垂直).

11. 求过一定点且与两个不平行的平面垂直的平面方程.

*12. 化公式(8)及(10)成普遍式. [提示: 用 n 个 $n-1$ 元方程有解的充要条件(见附录第三节).]

*13. 设动平面在三个坐标轴上的截距的倒数之和是常数 $k(k\neq 0)$, (1)求证动平面过一定点; (2)当 k 变化时, 求此定点的轨迹. [提示: 用截距式.]

第三节　平面方程的法线式

3·1　平面方程的法线式

设有不过原点的平面 π, 它和法线的交点是 D (见图 3-1). 又 $|OD|=p$, $\overrightarrow{OD}$ 的单位向量记为 $\boldsymbol{N}^0$, 则 $\overrightarrow{OD}=p\boldsymbol{N}^0$, 在点法式 $\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=0$ 中取 $\boldsymbol{m}$ 为 $\boldsymbol{N}^0$, 取 $\boldsymbol{P}_0$ 为 $p\boldsymbol{N}^0$, 则该式化为

$$\boldsymbol{N}^0\cdot(\boldsymbol{P}-p\boldsymbol{N}^0)=0,$$

即

$$\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}-p=0. \tag{1}$$

(1)式称为向量形式的平面方程的法线式[注]，这里$\boldsymbol{N}^0$是单位法线向量，p是从原点到平面的距离.

现在将(1)化成坐标形式．设α、β、γ是$\boldsymbol{N}$的方向角，则$\boldsymbol{N}^0=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$，于是(1)就可写成

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{2}$$

(2)叫做坐标形式的平面方程的法线式，这里$\cos\alpha$、$\cos\beta$和$\cos\gamma$是法线向量的方向余弦．可以看出(2)式和平面解析几何中直线方程的法线式非常类似，于是得出：

定理1 已知平面的单位法线向量为$\boldsymbol{N}^0=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$，从原点到平面的距离是$p$，则平面方程的向量形式是(1)；坐标形式是(2).

设平面π过原点，则$p=0$，此时法线向量的选定见第一节.

3·2 化平面方程的普遍式为法线式

已知平面方程的普遍式是

$$ax+by+cz+d=0,\ a^2+b^2+c^2\neq 0 \tag{3}$$

或

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{p}+d=0,\ \boldsymbol{m}=\{a,\ b,\ c\}\neq\boldsymbol{0}. \tag{4}$$

又
$$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

于是(4)式可以化为

$$\boldsymbol{m}^0\cdot\boldsymbol{p}+\frac{d}{|\boldsymbol{m}|}=0.$$

当$d<0$时，设$p=-\dfrac{d}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，则$p>0$，于是(4)化为

[注] 在平面解析几何里，(1)式表示直线方程的法线式，读者可自行推导.

$$\boldsymbol{m}^0\cdot\boldsymbol{p}-p=0. \tag{5}$$

(5)与(1)的形式完全相同，其中 $\boldsymbol{m}^0$ 即是(1)中的单位法线向量 $\boldsymbol{N}^0$.

当 $d>0$ 时，设 $p=\dfrac{d}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{-d}{-\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，则 $p>0$，于是(4)化为

$$(-\boldsymbol{m}^0)\cdot\boldsymbol{p}-p=0. \tag{6}$$

(6)与(1)的形式也完全相同，其中 $-\boldsymbol{m}^0$ 即是(1)中的单位法线向量 $\boldsymbol{N}^0$ 的反向量.

综合起来可得：(4)可化成(1)，其中 $p=\dfrac{-d}{\varepsilon|\boldsymbol{m}|}$，$\boldsymbol{N}^0=\varepsilon\boldsymbol{m}^0$，$\varepsilon$ 取 $+1$ 或 -1 依 $d<0$ 或 $d>0$ 而定. 从而又可以得到由(3)化为(2)的一种方法. 因为

$$p=\frac{-d}{\varepsilon|\boldsymbol{m}|}=\frac{-d}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

令

$$k=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\quad(\varepsilon=\pm1), \tag{7}$$

则 k 称为法式化因子，将(3)中各项乘以因子 k，得到

$$kax+kby+kcz+kd=0,$$

它与(2)表示同一个平面，则有

$$ka=\cos\alpha,\ kb=\cos\beta,\ kc=\cos\gamma,\ kd=-p.$$

利用(7)，得

$$\cos\alpha=\frac{a}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{b}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad -p=\frac{d}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{8}$$

于是得到将(3)化为(2)的法则：以法式化因数(7)去乘(3)式

即得(2)式. 法式化因数的符号应与 d 的正负相反. 即当 $d<0$ 时, 取 $\varepsilon=+1$, 当 $d>0$ 时, 取 $\varepsilon=-1$.

注意 上面所引进的法式化因数 k 也可直接导出: 将(3)的各项乘以因数 k, 可得到 $kax+kby+kcz+kd=0$. 如果它与 (2) 表示同一平面, 则得 $ka=\cos\alpha$, $kb=\cos\beta$, $kc=\cos\gamma$, $kd=-p$. 利用 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 就可推出

$$k=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

当 $d=0$ 时, 则 $p=0$, 根据第一节的规定: 若平面不过 z 轴, 则 $\gamma<90°$, 即 $\cos\gamma>0$. 因此 k 与 c 取同号, 即 $c>0$ 时, $\varepsilon=+1$; $c<0$ 时, $\varepsilon=-1$. 如果平面过 z 轴, 即 $c=0$, 此时 $\gamma=90°$, 取 $\beta<90°$, 即 $\cos\beta>0$. 因此 k 与 b 同号, 即 $b>0$ 时, $\varepsilon=+1$, $b<0$ 时, $\varepsilon=-1$. 如果平面与 yz 面重合, 则 $b=0$, $c=0$, $\gamma=90°$, $\beta=90°$, 取 $\alpha=0°$, 故有 $\cos\alpha=1$, 因此, k 与 a 同号, 即 $a>0$ 时, $\varepsilon=+1$, $a<0$ 时, $\varepsilon=-1$.

又由(8)式, 有

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}=k,$$

从而得

定理2 平面方程的普遍式(3)的一次项系数 a、b、c 是这平面法线的一组方向数; (ka, kb, kc)是法线向量的方向余弦, k 是法式化因数.

【例1】 化 $x+y+z+1=0$ 成法线式, 并说明它的单位法线向量在哪一个卦限?

解: 因式中 $d=+1$, 故 ε 必须取 -1, 得法式化因数为 $\frac{1}{-\sqrt{3}}$, 所求法线式是 $\frac{x+y+z+1}{-\sqrt{3}}=0$, 单位法线向量是

$\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$，它在第 VII 卦限.

【例 2】 化 $x+y+z=0$ 成法线式，并说明它的单位法线向量在哪一个卦限？

解：此时 $d=0$，$c=1$，故 ε 必须取 $+1$，得法式化因数为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，所求法线式是 $\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}=0$，单位法线向量是 $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$，它在第 I 卦限.

【例 3】 化 $x+y=0$ 成法线式，并说明它的单位法线向量在哪一个卦限？

解：此时 $c=d=0$，$b=1$，故 ε 必须取 1，得法式化因数为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，所求法线式是 $\frac{x+y}{\sqrt{2}}=0$，单位法线向量是 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\}$，它在 xy 面上第 I 象限内.

【例 4】 化 $-x=0$ 成法线式，并说明它的单位法线向量在哪一个卦限？

解：此时 $b=c=d=0$，$a=-1$，故 ε 必须取 -1，得法式化因数 $k=\frac{1}{-1}=-1$，所求法线式是 $\frac{-x}{-1}=0$，即 $x=0$，单位法线向量是 $+\boldsymbol{i}$.

习 题 3·3

1. 化下列平面方程的普遍式为法线式，并说明单位法线向量在哪一个卦限？

   (1) $x-2y+5z-3=0$；　　(2) $4x-4y-7z=0$；

   (3) $x-y=0$；　　(4) $x-z=0$；

   (5) $x-2=0$.

2. 已知：(1) $\alpha=120^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=120^\circ$, $p=5$;

(2) $\frac{\cos\alpha}{-3}=\frac{\cos\beta}{4}=\frac{\cos\gamma}{12}$, $p=0$.

求平面方程的法线式并化为普遍式。

3. 求证从原点到两个平面 $x-y+z=a$ 和 $x+y-z=a$ 等距离。

4. 判别平面 $ax+by+cz+d=0$ 和 $\rho ax+\rho by+\rho cz+\rho d=0(\rho\neq0)$ 的法线式是否相同？

5. 化点法式 $\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=0(\boldsymbol{P}_0\neq\boldsymbol{0})$成法线式。

6. 化$(\boldsymbol{P}_2\times\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_3\times\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2)\cdot\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{P}_3)$为法线式。

7. 已知从原点向不过原点的一平面所作法线的垂足是$(a,\ b,\ c)$，求此平面方程的法线式。[提示：利用第一章第三节公式 (1).]

8. 将平面方程的截距式化成法线式并求从原点到平面的垂直距离和该平面的三个截距的关系。

*9. 有原点相同的两个直角坐标系，如果一个平面在此两组坐标轴上的截距分别是 a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2. 求证 $a_1^{-2}+b_1^{-2}+c_1^{-2}=a_2^{-2}+b_2^{-2}+c_2^{-2}$. [提示：利用第 8 题.]

*10. 过一定点，任作三条两两垂直的直线与定平面相交，则所截线段的长度的倒数的平方和是常数. [提示：利用第 8 题.]

第四节　点和平面的关系

4·1　平面到点的有向距离

在平面解析几何中，直线到点的有向距离是讨论的重要问题之一。现在研究在空间中的平面到点的有向距离。已知一个平面 π，作它的法线向量 $\overrightarrow{ON}$，且使它与 π 交于 D。又知 π 外有一点 P_0，从 P_0 作 π 的垂线，其垂足是 M(图 3-10)。于是以 $\overrightarrow{ON}$ 的方向为正向，有向线段 MP_0 的大小就称为平面 π 到点 P_0 的有向距离或离差，而有向距离的绝对值就是点 P_0 到平面 π 的距离。当 π 不过原点时，根据 P_0 点与原点在

平面的同侧或异侧而规定有向距离是负还是正. 下面就来推求平面到点的有向距离(图 3-10). 设平面 π 的法线式是

$$\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}-p=0, \quad (1)$$

π 到 P_0 的有向距离 MP_0 是 d, 则在图 3-10 中, $d=\overrightarrow{DP_0}$ 在 $\overrightarrow{ON}$ 上射影的大小 $=\overrightarrow{DP_0}$ 在 $\boldsymbol{N}^0$ 上射影的大小 $=\overrightarrow{DP_0}\cdot\boldsymbol{N}^0=(\overrightarrow{OP_0}-\overrightarrow{OD})\cdot\boldsymbol{N}^0=(\boldsymbol{P}_0-p\boldsymbol{N}^0)\cdot\boldsymbol{N}^0=\boldsymbol{P}_0\cdot\boldsymbol{N}^0-p$, 因此得到:

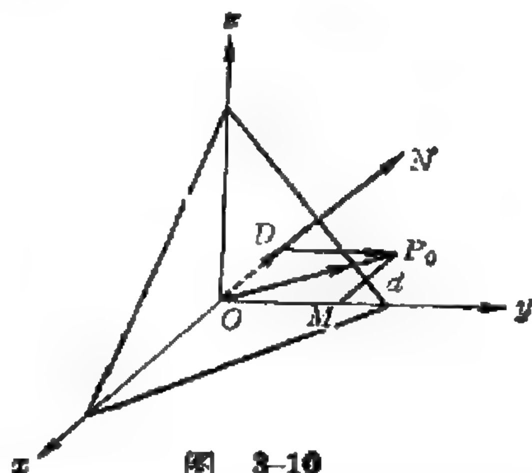


图 3-10

定理 1 平面 $\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}-p=0$ 到平面外一点 P_0 的有向距离是

$$\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}_0-p, \quad (2)$$

且 P_0 到这平面的距离是

$$|\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}_0-p|. \quad (3)$$

推论 1 平面

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \quad (4)$$

到平面外的一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的有向距离为

$$x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p; \quad (5)$$

P_0 到这平面的距离是

$$|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|. \quad (6)$$

这个定理及推论说明了法线式的重要作用, 利用它计算点到面的距离是非常方便的. 如果给定的平面方程不是法线式, 那么求有向距离时, 就要先将平面方程化为法线式, 然后再去推求.

【例 1】 求(1) $x+y+z+1=0$; (2) $x+y+z=0$; (3) $x+y=0$ 到 $(1, 1, 1)$ 的有向距离, 并求这点到它们的距离.

解：(1) 根据上节例1知：$x+y+z+1=0$ 的法线式是 $\frac{x+y+z+1}{-\sqrt{3}}=0$，故由推论1知：这平面到(1, 1, 1)的有向距离是 $\frac{1+1+1+1}{-\sqrt{3}}=-\frac{4}{3}\sqrt{3}$，而 (1, 1, 1) 到这平面的距离是 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$。

(2) 根据上节例2知：$x+y+z=0$ 的法线式是 $\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}=0$，故由推论1知，这平面到(1,1,1)的有向距离是 $\frac{1+1+1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，而(1, 1, 1)到这平面的距离也是 $\sqrt{3}$。

(3) 根据上节例3知：$x+y=0$ 的法线式是 $\frac{x+y}{\sqrt{2}}=0$，故由推论1知：这平面到(1,1,1)的有向距离是 $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，而 (1, 1, 1) 到这平面的距离也是 $\sqrt{2}$。

【例2】 求动点到长方体六面距离的平方和是常数的点的轨迹(用方程表示)。

解：首先以长方体的后左下的顶点为原点，用过此点的三条棱为坐标轴而建立直角坐标系（如图1-8）。于是已知长方体就是坐标长方体。设 $OA=a$，$OB=b$，$OC=c$。则六个面的方程将是：

$$x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b,\ z=0,\ z=c.$$

设动点是(x, y, z)，则动点到这六个平面的距离分别是

$$|x|,\ |x-a|,\ |y|,\ |y-b|,\ |z|,\ |z-c|.$$

由题设得：

$$|x|^2+|x-a|^2+|y|^2+|y-b|^2+|z|^2+|z-c|^2=k^2,$$

这里 k 是常数，展开合并同类项即得轨迹方程

$$2(x^2+y^2+z^2)-2(ax+by+cz)+a^2+b^2+c^2-k^2=0.$$

至于它的形状，后面再去研究.

【例 3】 求证任一平面到四面体的重心的有向距离等于它到四个顶点的有向距离的代数和的四分之一.

【证】 设四面体的四个顶点是 $P_r(x_r, y_r, z_r)(r=1, 2, 3, 4)$. 设重心是 G, 则 $\boldsymbol{G}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_4)$. 假定任一平面是 $\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}-p=0$, 这平面到四个顶点及重心的有向距离分别是 $d_r(r=1, 2, 3, 4)$ 及 d_g. 于是有

$$d_r=\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}_r-p,\ d_g=\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{G}-p.$$

因此得

$$\begin{aligned}d_1+d_2+d_3+d_4&=\boldsymbol{N}^0\cdot(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_4)-4p\\&=4\left[\boldsymbol{N}^0\cdot\left(\frac{\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_4}{4}\right)-p\right]\\&=4(\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{G}-p)=4d_g.\end{aligned}$$

也就是

$$d_g=\frac{1}{4}(d_1+d_2+d_3+d_4).\ ▌$$

4·2 两点在平面同侧的判定

同平面解析几何里关于两点在直线同侧的判定一样，现在研究空间中的两点在平面同侧的判定：如果一个平面到两点的有向距离同号，则这两点就在这平面的同侧，否则就在这平面的两侧. 已知一个平面 $ax+by+cz+d=0$ 和这个平面外的两个点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，则此平面到这两点的有向距离就分别是

$$\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\quad 和\quad \frac{ax_2+by_2+cz_2+d}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \varepsilon=\pm1.$$

于是 P_1 和 P_2 在平面同侧的充要条件是

$$(ax_1+by_1+cz_1+d)(ax_2+by_2+cz_2+d)>0. \qquad (7)$$

【例 4】 两点(1, 1, 1)和(−1, −1, −1)是否在平面 $x+2y+3z+4=0$ 的同侧?

解: 由(7)可知$[(1)+2(1)+3(1)+4][(-1)+2(-1)+3(-1)+4]=10\times(-2)<0$. 故这两点在平面两侧.

由(7)可知: P_1 及 P_2 在 $ax+by+cz+d=0$ 同侧的充要条件是 $ax_1+by_1+cz_1+d$ 和 $ax_2+by_2+cz_2+d$ 必同时是正或同时是负. 于是适合不等式 $ax+by+cz+d>0$ 的所有点必在平面 $ax+by+cz+d=0$ 的同侧. 由于平面把空间划分为两个半空间, 我们将 $ax+by+cz+d>0$ 叫正半空间, 而将 $ax+by+cz+d<0$ 叫负半空间, 即这两半空间的所有点分别在平面的两侧.

4·3 由两点所定的直线与定平面的交点分这两点所成线段的比

现在首先证明一个非常有用的定理.

定理 2 已知平面 $ax+by+cz+d=0$ 外两个点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 且 P_1P_2 的联线与这平面相交, 则交点分 $\overline{P_1P_2}$ 的分比是

$$-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{ax_2+by_2+cz_2+d}. \tag{8}$$

【证】 设已知平面与 $\overline{P_1P_2}$ 的交点为 P', 又 P' 分 $\overline{P_1P_2}$ 的比是 λ, 则 P' 点的坐标为

$$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

由于点 P' 在已知平面上, 于是

$$a\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)+b\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)+c\left(\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)+d=0,$$

即 $ax_1+by_1+cz_1+d+\lambda(ax_2+by_2+cz_2+d)=0.$

又 P_1 和 P_2 不在已知平面上，因此

$$ax_1+by_1+cz_1+d\neq 0,$$
$$ax_2+by_2+cz_2+d\neq 0.$$

于是得

$$\lambda=-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{ax_2+by_2+cz_2+d}.$$

即得证. 】

显然，当 P_1 及 P_2 在平面两侧时，则 P_1P_2 必与平面相交，此时分点是内分点，故 λ 必为正. 另一方面，当 P_1 及 P_2 在平面两侧时，则 $ax_1+by_1+cz_1+d$ 与 $ax_2+by_2+cz_2+d$ 反号. 由公式(8)可知，λ 也必为正，这与上面的结论相符合. 关于 P_1 及 P_2 在平面同侧的情况可作同样讨论.

*【例 6】 已知一平面与空间四边形的各边相交，则各交点依次分各边之比的乘积为常数，且对多边形的情况也成立.

【证】 设已知四边形的四个顶点是 $P_r(x_r, y_r, z_r)(r=1, 2, 3, 4)$. 与四边都相交的平面是 $ax+by+cz+d=0$，且此平面与四边 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 的交点分别是 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. 由公式(8)，得

$$\frac{P_1Q_1}{Q_1P_2}=-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{ax_2+by_2+cz_2+d},$$
$$\frac{P_2Q_2}{Q_2P_3}=-\frac{ax_2+by_2+cz_2+d}{ax_3+by_3+cz_3+d},$$
$$\frac{P_3Q_3}{Q_3P_4}=-\frac{ax_3+by_3+cz_3+d}{ax_4+by_4+cz_4+d},$$
$$\frac{P_4Q_4}{Q_4P_1}=-\frac{ax_4+by_4+cz_4+d}{ax_1+by_1+cz_1+d},$$

将此四式联乘，即得

$$\frac{P_1Q_1}{Q_1P_2}\cdot\frac{P_2Q_2}{Q_2P_3}\cdot\frac{P_3Q_3}{Q_3P_4}\cdot\frac{P_4Q_4}{Q_4P_1}=1.$$

次设空间 n 边形为 $P_1P_2\cdots P_n$，平面 $ax+by+cz+d=0$ 与此 n 边形的 n 个边都相交，交点所分各边 P_1P_2, P_2P_3, $\cdots$, $P_{n-1}P_n$, P_nP_1 之比为 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n. 于是

$$\lambda_1 = -\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{ax_2+by_2+cz_2+d},$$

$$\lambda_2 = -\frac{ax_2+by_2+cz_2+d}{ax_3+by_3+cz_3+d},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\lambda_n = -\frac{ax_n+by_n+cz_n+d}{ax_1+by_1+cz_1+d}.$$

将此 n 个式子连乘，即得 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^n$.]

习 题 3·4

1. 求平面 $x+2y-2z=9$ 到两点 $(2, 3, -5)$ 和 $(3, 4, 7)$ 的有向距离. 它们是否在这平面的同侧?
2. 求证平面 $x+ay+az=0$ 到点 $(1, 0, 0)$ 和到点 $(1, a, a)$ 的有向距离的积是常数，其中 a 是参数.
3. 定 λ，使 $(\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$ 和 $(-1, -1, -1)$ 都在 $x+y+z+1=0$ 同侧.
4. (1) 求证平面 $3x-4y-2z+5=0$ 与以 $P_1(3, -2, 1)$ 和 $P_2(-2, 5, 2)$ 为端点的线段相交;

   (2) 求证平面 $5x-2y+z-1=0$ 与以 $P_1(1, 4, -3)$ 及 $P_2(2, 5, 0)$ 为端点的线段不交.
5. 设动点到两个平面 $x+y+z=0$ 与 $x-2y+z=0$ 的距离的平方和等于它到 $x=z$ 的距离的平方，求此点的轨迹方程.
6. 设动点与原点的距离等于此点到平面 $2x+3y-6z=2$ 的距离的 7 倍，求此点的轨迹方程.
7. 已知三角锥底面的三个顶点是 $(3, 5, 3)$, $(-2, 11, -5)$ 和 $(1, -1, 4)$，而顶点是 $(0, 6, 4)$，求它的高.
8. 求一平面方程，使它到三个点 $(6, 1, -1)$、$(0, 5, 4)$ 和 $(5, 2, 0)$ 的有向距离分别是 -1, 3 和 0. [提示: 用法线式.]

*9. 利用面到点的有向距离推出公式(8). [提示: 按内分与外分两种情况讨论.]

*10. 如果动平面到 n 个定点的有向距离的代数和是零，则此动平面必过这 n 个定点的平均中心. [提示: 利用法线式表示动平面.]

第五节　两个平面的关系

5·1　两个平面的相关位置

设有两个平面

π_r: $a_r x + b_r y + c_r z + d_r = 0$, $a_r^2 + b_r^2 + c_r^2 \neq 0$ $(r=1, 2)$.

由第三节定理2可知：a_r, b_r, c_r 是 π_r 的法线的一组方向数，又由立体几何可知：两个平面的相关位置有三种，下面就 a_r, b_r, c_r 研究这些情况.

1. π_1 和 π_2 相交的充要条件是它们的法线不平行，因此它们的方向数不成比例，即 $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$, $\frac{c_1}{c_2}$ 三者不全相等.

2. π_1 和 π_2 重合的充要条件是两个方程表示同一个平面，即对应系数成比例，故得

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}. \tag{1}$$

3. π_1 和 π_2 平行的充要条件是它们的法线平行，因此它们的方向数成比例，即

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}. \tag{2}$$

将上面结果归纳起来，得

定理1　两个平面 $a_r x + b_r y + c_r z + d_r = 0$, $a_r^2 + b_r^2 + c_r^2 \neq 0$ $(r=1, 2)$ 相交的充要条件是 $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$, $\frac{c_1}{c_2}$ 三者不全相等；重合的充要条件是(1)；平行的充要条件是(2).

如果将 π_1 和 π_2 的方程写成向量式，则有

定理2　两个平面 $\boldsymbol{m}_r \cdot \boldsymbol{P} + d_r = 0$ $(r=1, 2)$ 相交的充要条件是 $\boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{m}_2 \neq \boldsymbol{0}$；重合的充要条件是

$$\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2=\boldsymbol{0},\ d_1\boldsymbol{m}_2-d_2\boldsymbol{m}_1=0; \tag{3}$$

平行的充要条件是

$$\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2=\boldsymbol{0},\ d_1\boldsymbol{m}_2-d_2\boldsymbol{m}_1\neq 0. \tag{4}$$

且当两个平面相交时，$\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2$ 将是交线上的一个向量

此定理的证明留作习题，读者可自行补上.

*现在再从代数角度就两个方程

$$a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0,\ a_r^2+b_r^2+c_r^2\neq 0\quad(r=1,\ 2)$$

的解的个数来讨论：设这两个方程的系数矩阵和增广矩阵分别是 C 和 A，也即

$$C=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\end{bmatrix},$$

又它们的秩分别记作 R_C 和 R_A（见附录第二节）.

1．当 $R_C=R_A=2$ 时，这两个方程有解，而且解里仅含有一个参数（见附录第三节）．由第二章第四节定理 4 知道：这些解所表示的点必在一条直线上，此直线就是这两个平面的交线.

2．当 $R_C=R_A=1$ 时，这两个方程有解，而且解里仅含有两个参数．由本章第二节知道：这些解所表示的点必在一个平面上，这说明两平面相重合.

3．当 $R_C=1$，$R_A=2$ 时，这两个方程无解，也就是说，这两个平面相平行.

总结起来即下述定理：

***定理 3**　两个平面 $a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0$，$a_r^2+b_r^2+c_r^2\neq 0(r=1,\ 2)$ 相交的充要条件是 $R_C=R_A=2$；重合的充要条件是 $R_C=R_A=1$；平行的充要条件是 $R_C=1$，$R_A=2$．这里 R_C 和 R_A 分别是上面两个方程的系数矩阵和增广矩阵的秩.

【例 1】　就 λ 和 μ 讨论两个平面

$$\lambda x+\lambda y+\lambda^2z+\mu=0\,(\lambda\neq 0)\text{ 和 }x+y+z+1=0$$

的相关位置.

解：相交的充要条件是 λ、λ、λ^2 不全等，即 $\lambda^2\neq\lambda$，又

$\lambda \neq 0$, 故得 $\lambda \neq 1$; 重合的充要条件是 $\lambda = \lambda = \lambda^2 = \mu$ 即 $\lambda = \mu = 1$; 平行的充要条件是 $\lambda = \lambda = \lambda^2 \neq \mu$ 即 $\lambda = 1$, $\mu \neq 1$.

【例 2】 已知两个平面 $3x+2y+5z-4=0$ 和 $x-2y-z+6=0$. 先证明它们相交, 然后在它们所成的四个二面角内各取一点.

解: 由于 $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{-2}$, $\frac{5}{-1}$ 不相等, 故两个平面必相交. 将它们化成法线式, 得

$$\frac{3x+2y+5z-4}{\sqrt{38}}=0 \text{ 和 } \frac{x-2y-z+6}{-\sqrt{6}}=0.$$

设 d_1 和 d_2 分别表示此两个平面到一点的有向距离, 则于四个二面角内的点, d_1 和 d_2 的符号将分别是(+, +), (−, −), (+, −)和(−, +). 例如 $(-1, 3, 1)$ 使 d_1 为 +, d_2 为 +; $(1, -2, -2)$ 使 d_1 为 −, d_2 为 −; $(4, 1, -1)$ 使 d_1 为 +, d_2 为 −; $(-4, 1, 1)$ 使 d_1 为 −, d_2 为 +.

5·2 两个相交平面的交角和平分角面

当两直线相交时, 产生两对对顶角, 且每对都相等. 同样地, 两个平面相交时, 产生四个二面角, 形成两对对棱二面角, 且每对也都相等. 于是推求两个相交平面的交角问题就化为推求二面角的大小问题. 但是二面角的大小是由它的平面角来度量的. 下面就研究平面角的计算问题. 设 π_1 与 π_2 两个半平面交于 l(图 3-11). 从原

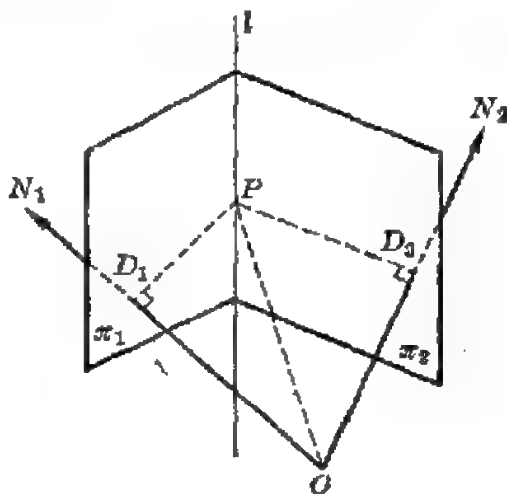


图 3-11

点分别引法线向量 $\overrightarrow{ON_1}$ 和 $\overrightarrow{ON_2}$，垂足是 D_1 和 D_2. 作 $D_1P_1 \perp l$, $D_2P_2 \perp l$, 由三垂线定理得知: $OP_1 \perp l$, $OP_2 \perp l$, 但从 O 仅能作 l 的一条垂线 OP, 垂足是 P, 故知 P_1 与 P_2 必与 P 相重合. 由于 OP, D_1P 和 D_2P 都与 l 垂直于 P, 故 O、D_1、P、D_2 四点共面, 即 $\widehat{D_1PD_2}+\widehat{D_1OD_2}=180°$. 但 $\widehat{D_1PD_2}$ 是二面角的平面角, 故知二面角的平面角和二平面的两个法线向量的交角互补. 由此即推出: 两平面相交, 则所构成的两个二面角中的一个等于它们的两个法线向量的交角.

定理 4 设两个平面 $\boldsymbol{N}_r^0\cdot\boldsymbol{P}-p_r=0\ (r=1,\ 2)$ 相交, 则它们交角的余弦等于 $\pm(\boldsymbol{N}_1^0\cdot\boldsymbol{N}_2^0)$.

证 设两个法线向量的交角是 θ, 则两个平面的交角是 θ 或 $\pi-\theta$, 但 $\cos\theta=\boldsymbol{N}_1^0\cdot\boldsymbol{N}_2^0$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$, 即得证. ▌

推论 两个平面 $\boldsymbol{N}_r^0\cdot\boldsymbol{P}-p_r=0\ (r=1,\ 2)$ 垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{N}_1^0\cdot\boldsymbol{N}_2^0=0. \tag{5}$$

定理 5 两个平面

$$a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0,\quad a_r^2+b_r^2+c_r^2\neq 0\quad (r=1,\ 2)$$

如果相交,则它们交角的余弦等于 $\dfrac{\pm(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$.

推论 两个平面 $a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0$, $a_r^2+b_r^2+c_r^2\neq 0$ $(r=1,\ 2)$ 垂直的充要条件是

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0. \tag{6}$$

【例 3】 已知两个相交平面

$$2x-y+3z-5=0\quad 和\quad 3x+2y-z-3=0.$$

问 (1) 含原点的二面角是锐角还是钝角? (2) 点 $(2,\ -1,\ 3)$ 及原点在这两个平面所成的同一二面角内, 还是在相邻二面

角内？还是在对棱二面角内？

解：(1) 首先将已知平面方程化成法线式，得

$$\frac{2x-y+3z-5}{\sqrt{14}}=0 \quad 和 \quad \frac{3x+2y-z-3}{\sqrt{14}}=0.$$

它们的单位法线向量是

$$N_1^0=\left\{\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$$

和

$$N_2^0=\left\{\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right\}.$$

设它们的夹角是 θ，则

$$\cos\theta=N_1^0\cdot N_2^0=\frac{1}{14}.$$

即两个正法线向量的夹角是锐角，故含原点的二面角是钝角。

(2) 又此两平面到 $(2, -1, 3)$ 的有向距离分别是 $\frac{9}{\sqrt{14}}$ 和 $\frac{-2}{\sqrt{14}}$，它们分别与 $p_1=\frac{5}{\sqrt{14}}$ 及 $p_2=\frac{3}{\sqrt{14}}$ 不具有相同的符号，因此这个点及原点在相邻的二面角内。

*【例 4】 求证 $x^2-y^2-z^2+2yz=0$ 表示两个相交平面，并求所交的锐角。

【证及解】 将左端分解因式得 $x^2-(y-z)^2=0$，即

$$(x-y+z)(x+y-z)=0,$$

故原方程表示两个平面

$$x-y+z=0 \quad 和 \quad x+y-z=0.$$

这两个平面的单位法线向量是

$$N_1^0=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \quad 和 \quad N_2^0=\left\{\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

于是 $N_1^0\cdot N_2^0=\frac{1}{3}$，即这两平面所交的锐角是 $\arccos\frac{1}{3}$. ▌

在平面解析几何里曾利用有向距离推求两条相交直线的平分角线的方程，这个方法完全可以推广到空间。为了容易

理解起见，可以先作图复习一下平面解析几何的方法.

下面先来推求两个相交平面

$$\pi_r:\ \boldsymbol{N}_r^0\cdot\boldsymbol{P}_r-p_r=0\quad (r=1,\ 2)$$

的平分角面的方程.

当 $p_1\neq 0$, $p_2\neq 0$ 时，在两个平分角面中，位于原点所在区域中的一个叫做 α，另一个叫做 β. 设 P_0 为 α 上的任一点，由于 P_0 和原点在同一个二面角或两个对棱二面角内，故 π_1 和 π_2 到 P_0 的有向距离相等且同号，于是得

$$\boldsymbol{N}_1^0\cdot\boldsymbol{P}_0-p_1=\boldsymbol{N}_2^0\cdot\boldsymbol{P}_0-p_2,$$

即

$$(\boldsymbol{N}_1^0-\boldsymbol{N}_2^0)\cdot\boldsymbol{P}_0=p_1-p_2.$$

故 α 的方程是

$$(\boldsymbol{N}_1^0-\boldsymbol{N}_2^0)\cdot\boldsymbol{P}-(p_1-p_2)=0. \tag{7}$$

如果 P_0 是 β 上的任意一点，则 π_1 和 π_2 到 P_0 的有向距离必互为相反数，于是得

$$\boldsymbol{N}_1^0\cdot\boldsymbol{P}_0-p_1=-(\boldsymbol{N}_2^0\cdot\boldsymbol{P}_0-p_2),$$

即

$$(\boldsymbol{N}_1^0+\boldsymbol{N}_2^0)\cdot\boldsymbol{P}_0=p_1+p_2.$$

故 β 的方程是

$$(\boldsymbol{N}_1^0+\boldsymbol{N}_2^0)\cdot\boldsymbol{P}-(p_1+p_2)=0. \tag{8}$$

(7)中的 $\boldsymbol{N}_1^0-\boldsymbol{N}_2^0$ 和(8)中的 $\boldsymbol{N}_1^0+\boldsymbol{N}_2^0$ 分别是两个平分角面的法向量，且

$$(\boldsymbol{N}_1^0-\boldsymbol{N}_2^0)\cdot(\boldsymbol{N}_1^0+\boldsymbol{N}_2^0)=(\boldsymbol{N}_1^0)^2-(\boldsymbol{N}_2^0)^2=1-1=0.$$

这说明两个平分角面必直交.

当 $p_1=0$, $p_2\neq 0$ 或 $p_1\neq 0$, $p_2=0$ 或 $p_1=0$, $p_2=0$ 时，(7)与(8)仍成立，读者试自行补证. 于是有

定理 6 设两个平面

$$\boldsymbol{N}_r^0\cdot\boldsymbol{P}-p_r=0\quad (r=1,\ 2)$$

相交，则它们的两个平分角面的方程是(7)和(8)，且二平分角

面是互相垂直的.

定理 7 已知两个平面

$$a_r x+b_r y+c_r z+d_r=0,\ \ a_r^2\neq b_r^2+c_r^2\neq 0\quad (r=1,\ 2).$$

则它们的两个平分角面的方程是

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}; \tag{9}$$

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}. \tag{10}$$

【例 5】 求例 3 中分别包含原点及点 (2, −1, 3) 的两个二面角的平分角面的方程.

解: 在例 3 中, 由于 $p_1>0$, $p_2>0$, 故得包含原点的二面角的平分角面的方程是

$$\frac{2x-y+3z-5}{\sqrt{14}}=\frac{3x+2y-z-3}{-\sqrt{14}},$$

即
$$x+3y-4z+2=0.$$

由于点 (2, −1, 3) 及原点在相邻的二面角内, 故得包含点 (2, −1, 3) 的二面角的平分角面的方程是

$$\frac{2x-y+3z-5}{\sqrt{14}}=\frac{3x+2y-z-3}{-\sqrt{14}},$$

即
$$5x+y+2z-8=0.$$

5·3 两个平行平面的距离

已知二平行平面

$$\pi_1:\ ax+by+cz+d_1=0\quad 和\quad \pi_2:\ ax+by+cz+d_2=0,$$

现推求它们的距离 δ.

在 π_1 上任取 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, 则 P_0 到 π_2 的距离即为 δ, 因此

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

又因 $$ax_0 + by_0 + cz_0 + d_1 = 0,$$

将 $$ax_0 + by_0 + cz_0 = -d_1$$

代入上式，得

$$\delta = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

【例 6】 已知二平行平面的法线式方程是

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_1 = 0$$

和 $$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_2 = 0,$$

其中 $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$. 求与二已知平面平行且将它们的距离分为三等分的两个平面。

解：已知两个平面必在原点同侧，不失普遍性，可设 $p_2 > p_1$，于是已知二平面的距离是 $p_2 - p_1$. 又从原点到所求两平面的距离分别是

$$p_1 + \frac{1}{3}(p_2 - p_1) = \frac{1}{3}(2p_1 + p_2)$$

和 $$p_1 + \frac{2}{3}(p_2 - p_1) = \frac{1}{3}(p_1 + 2p_2).$$

故所求二平面是

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \frac{1}{3}(2p_1 + p_2) = 0$$

和 $$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \frac{1}{3}(p_1 + 2p_2) = 0.$$

习 题 3·5

1. 已知两个平面 $x+y+z-1=0$ 和 $2x-3y+z-2=0$. 证明它们互相垂直，并证点 $(1, 1, 1)$、$(1, -1, -1)$、$(-1, -1, -1)$ 和 $(2, -2, 2)$ 分别位于二已知平面所分成的四个区域内。

2. 试确定 k 的值，使二平面 $kx+y+z-k=0$, $kx+y-2z=0$ 互相垂直.

3. 试确定 k 的值，使二平面 $kx+y+z+k=0$, $x+ky+kz+k=0$ (1)互相平行；(2)重合.

4. 就 k 取不同的值，讨论下列二平行平面的位置：

$$x-y+z=3 \quad 和 \quad x-y+z=k.$$

5. 证明原点位于 $x+2y+2z=9$ 和 $4x-3y+12z+13=0$ 所成的二面角为锐角的区域内. 求它们的平分角面的方程，并指出哪一个是平分二面角为锐角的平面？

6. 求证习题 3.1 中第 6 题 (4) 所表示的两个平面相交，并求所交的锐角.

7. 求平行于平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 且与此平面距离为 k 的平面方程.

8. 已知三平行平面 π_1: $x+y+z+1=0$, π_2: $x+y+z+2=0$, 和 π_3: $x+y+z+3=0$. 求证 π_2 位于 π_1 和 π_3 之间.

9. 已知三平行平面 π_r: $ax+by+cz+d_r=0$ $(r=1, 2, 3)$. 求 π_1、π_2、π_3 成等距离的充要条件.

*10. 已知二平行平面

$$ax+by+cz+d_1=0 \quad 和 \quad ax+by+cz+d_2=0 \quad (d_1d_2\neq 0).$$

求平行于它们的两个平面，并将它们的距离分成三等分.

[提示：化成法线式，分情况讨论.]

*第六节　三平面的关系

由立体几何知道，三平面的位置关系有各种不同的情况. 例如三平面共点，形成一个三面角，三平面共线，形成一个面束，三平面两两相交，形成一个三棱柱等等. 虽然它们的位置关系是比较复杂的，但如同讨论两平面的位置关系一样，可将这个几何问题转化为方程组解的个数来研究(见附录第三节).

若已知三平面的方程是

$$\pi_r:\ a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0,\ a_r^2+b_r^2+c_r^2\neq 0 \quad (r=1, 2, 3).$$

设此三个方程所成的方程组的系数矩阵和增广矩阵分别是 C 和 A，即

$$C=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

将它们的秩分别记作 R_C 和 R_A，在 C 的行列式里，a_i, b_i, c_i 的代数余子式分别记作 A_i, B_i, C_i. 下面分各种情况讨论.

1. 当 $R_C=3$, $R_A=3$ 时，在方程组的解里，不含有参数，即有唯一的解，这时三平面仅有一个交点，它们形成一个三面角(见图 3-12).

2. 当 $R_C=2$, $R_A=3$ 时，三个方程无解，三平面无公共点.



图 3-12

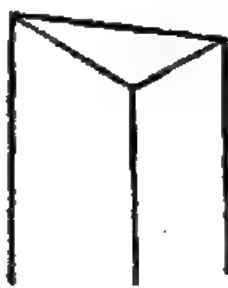


图 3-13

(1) 设 A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3 三组中每组里至少有一个不是零. 就第一组而言，$\frac{a_2}{a_3}$, $\frac{b_2}{b_3}$, $\frac{c_2}{c_3}$ 不全相等，因此 π_2 与 π_3 相交. 用 $\boldsymbol{m}_r(r=1, 2, 3)$ 表示这三个平面的法向量，且 a_r, b_r, c_r 分别是它们的坐标，于是 $\boldsymbol{m}_2\times\boldsymbol{m}_3\neq 0$ 必是 π_2 和 π_3 交线上的一个向量，但

$$\boldsymbol{m}_1\cdot(\boldsymbol{m}_2\times\boldsymbol{m}_3)=(\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{m}_3)=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0 \quad (\text{因为 } R_C=2),$$

这里 k 是常数，故这交线必与 π_1 平行. 同理可证，π_3、π_1 的交线与 π_2 平行；π_1、π_2 的交线与 π_3 平行. 因此三平面形成一个三棱柱(见图 3-13).

(2) 设 A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 两组中每组里至少有一个不是零，而 A_3, B_3, C_3 都是零. 这时三个二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1, & d_1 \\ a_2, & d_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1, & d_1 \\ b_2, & d_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1, & d_1 \\ c_2, & d_2 \end{vmatrix}$

都不是零，否则 $R_A\neq3$. 于是 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$，即知 π_1 与 π_2 平行. 同上可证，π_2、π_3 的交线与 π_1 平行，且 π_3、π_1 的交线与 π_2 平行，因此三平面形成两者平行，第三个与第一、二个都相交，且交线互相平行（见图 3-14）.

(3) 设 A_1、B_1、C_1 一组中至少有一个不是零，而 A_2、B_2、C_2; A_3、B_3、C_3 都是零. 于是，$\pi_2\not\parallel\pi_3$. 另一方面，$\pi_3\parallel\pi_1$，$\pi_2\parallel\pi_1$，因而得 $\pi_2\parallel\pi_3$. 产生了矛盾. 故这种情况不能成立.

3. 当 $R_0=2$, $R_A=2$ 时，这三个方程有解，且解里仅含有一个参数，故这些解所对应的点必在一条直线上.

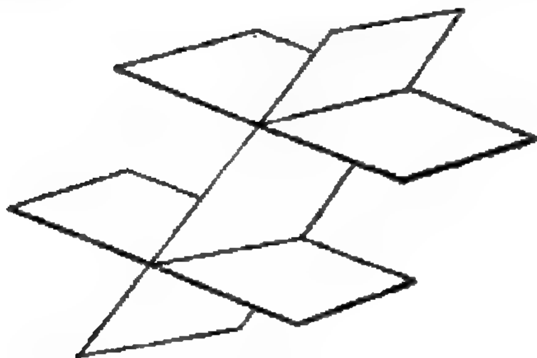


图 3-14

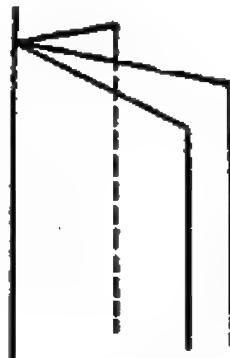


图 3-15

(1) 设 A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3 三组中每组里至少有一个不是零. 同上可知，每两个平面的交线必与第三面平行，但这三个平面仅有一条直线的公共点，故这三平面共线，亦即形成平面束（见图 3-15）.

(2) 设 A_1、B_1、C_1; A_2、B_2、C_2 两组中每组里至少有一个不是零，又 A_3、B_3、C_3 都是零. 同上可知，$\pi_1\parallel\pi_2$，且 π_3 与 π_1 的交线及 π_3 与 π_2 的交线互相平行. 但这三个平面仅有一条直线的公共点，故这三平面有两个重合而第三个与它们相交（见图 3-16）.

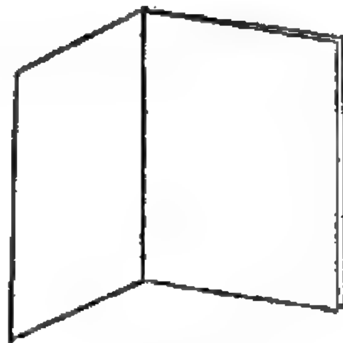


图 3-16

(3) 设 A_1、B_1、C_1 一组中至少有一个不是零，而 A_2、B_2、C_2; A_3、B_3、C_3 都是零. 同上可知，这种情况不成立.

4．当 $R_C=1$，$R_A=3$ 时，此种情况不可能出现．

5．当 $R_C=1$，$R_A=2$ 时，三个方程无解，即这三平面无公共点．

(1) 此时 A_i，B_i，C_i 都是零，设 A 中有两个二阶行列式不是零，例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

这时

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}, \quad \frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3}=\frac{c_1}{c_3}\neq\frac{d_1}{d_3},$$

于是 π_1 与 π_2 平行，π_1 与 π_3 平行．即这三平面平行(见图 3-17)．



图 3-17



图 3-18

(2) 此时 A_i，B_i，C_i 都是零，设 A 中有一个二阶行列式不是零，例如 $\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0$，此时 π_1 与 π_2 平行，由于 A 中其余所有二阶行列式都是零，故 π_2 与 π_3 重合．这时三个平面中有两个重合，而第三个平面与之平行(见图 3-18)．

6．当 $R_C=1$，$R_A=1$ 时，这三个方程有解，且解里含有两个参数，故这些解所对应的点必在一个平面内，即三平面相重合(见图 3-19)．



图 3-19

从上述可看到，三个方程的系数适合不同的代数条件，即可得出各种不同的几何图形．反过来，由这些不同的几何图形，也可推出相应的代数条件，这一工作，作为练习，留给读者试自行补上．

归纳上面讨论的结果，则有以下各定理：

定理 1 已知三个平面方程的系数矩阵和增广矩阵的秩，则 (1) 有一个交点的充要条件是它们的秩都是 3；(2) 共线的充要条件是它们的

秩都是2; (3)重合的充要条件是它们的秩都是1; (4)没有公共点的充要条件是它们的秩不相同.

定理2 已知三个平面方程的系数矩阵和增广矩阵的秩分别是2和3时，则(1)三平面形成一个三棱柱的充要条件是：系数矩阵的行列式所成的三组代数余子式 A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3 中每组里至少有一个不是零; (2)三个平面中有两个平行且第三个都与这两个相交的充要条件是：上述三组中有两组在每组里至少有一个不是零.

定理3 已知三个平面方程的系数矩阵和增广矩阵的秩都是2，则(1)三个平面中没有两个平行或重合，但是共线，其充要条件是：上述三组的每组里至少有一个不是零; (2)三个平面中有两个重合且第三个与它们相交的充要条件是：上述三组中有两组在每组里至少有一个不是零.

定理4 已知三个平面方程的系数矩阵和增广矩阵的秩分别是1和2时，则(1)三个平面平行的充要条件是：A_i, B_i, C_i 都是零，而 A 中有两个二阶行列式不是零; (2)三个平面中有两个重合，而第三个与之平行的充要条件是：A_i, B_i, C_i 都是零，且 A 中有一个二阶行列式不是零.

【例1】 讨论三个平面

$$-2x+y+z=1,\ x-2y+z=-2,\ x+y-2z=4$$

的相关位置.

解：此时

$$C=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & -4\end{bmatrix}.$$

在 C 中，

$$\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=0,$$

故 $R_C=2$; 在 A 中

$$\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -4\end{vmatrix}\neq 0,$$

故 $R_A=3$. 在 C 中的第一行，第二行和第三行的代数余子式都是 3，故由定理 2 的(1)知：这三个平面形成一个三棱柱，且棱的一组方向数是 1,1, 1.

【例 2】 讨论三个平面

$$ax+hy+gz=0,\ hx+by+fz=0,\ gx+fy+cz=0$$

的相关位置.

解：此时
$$C=A=\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}.$$

1. 当$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}\neq 0$ 时，$R_C=R_A=3$，故三个平面形成三面角，且顶点在原点.

2. 当$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$ 时，C 的第一行、第二行和第三行的三组代数余子式中每组内至少有一个不是零. 于是 $R_C=R_A=2$. 由定理 3 的(1)可知：这三个平面共线且交线过原点.

3. 当$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$ 时，上面三组代数余子式中有两组，每组里至少有一个不是零，于是 $R_C=R_A=2$. 由定理 3 的(2)可知：三个平面中有两个重合，且第三个与它们相交.

4. 当$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$ 时，且所有代数余子式都是零，则 $R_C=R_A=1$. 由定理 1 的(3)可知：三个平面重合.

【例 3】 就 λ 值讨论三个平面

$$\lambda x+y+z=1,\ x+\lambda y+z=\lambda,\ x+y+\lambda z=\lambda^2$$

的相关位置.

解：此时 $C=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & -1\\ 1 & \lambda & 1 & -\lambda\\ 1 & 1 & \lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}$.

且
$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

1．设 $\lambda\neq 1$ 或 $\lambda\neq -2$，则 $R_C=R_A=3$，此时三个平面形成一个三面角，顶点是 $\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\ \frac{1}{\lambda+2},\ \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right)$.

2．设 $\lambda=-2$ 化为例 1.

3．设 $\lambda=1$，则 $R_C=R_A=1$，此时三平面化为一个重合平面

$$x+y+z=1.$$

*【例 4】 求证四面体的四个面所成的六个二面角的内平分角面共点.

【证】 以四面体内部的任一点为原点建立直角坐标系，四个面的法线式是

$$u_r\equiv x\cos\alpha_r+y\cos\beta_r+z\cos\gamma_r-p_r=0\quad (r=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

或用简记法写作 $u_r=0(r=1,\ 2,\ 3)$. 于是以 u_1 与 u_2 两个平面的交线为棱的二面角的内平分角面的方程是 $u_1-u_2=0$. 同理，其它五个内平分角面的方程是 $u_1-u_3=0$，$u_1-u_4=0$，$u_2-u_3=0$，$u_2-u_4=0$，$u_3-u_4=0$. 如果这六个平面共点，它的交点应由方程

$$u_1=u_2=u_3=u_4=-u \tag{*}$$

决定，这里 u 是辅助未知数. (*)可以写作

$$x\cos\alpha_r+y\cos\beta_r+z\cos\gamma_r+u=p_r. \tag{**}$$

由于 $u_r=0$ 围成一个四面体，故 $u_1=0$，$u_2=0$，$u_3=0$，$u_4=0$ 不能有公共点(参看附录第三节定理 2)，于是得

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & 1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & 1\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & 1\\ \cos\alpha_4 & \cos\beta_4 & \cos\gamma_4 & 1\end{vmatrix}\neq 0.$$

因此(**)有解，即这六平面的交点. ▌

注意 例4是平面上的"三角形的三条内平分角线共点"的推广。证法也完全一样。

*【例5】 求证三平面

$$ax+by+cz+d_1=0,\ bx+cy+az+d_2=0,\ cx+ay+bz+d_3=0$$
$$(a+b+c\neq 0,\ b\neq c,\ c\neq a,\ a\neq b)$$

形成一个正三棱锥的侧面，并求轴的方向数。

【证及解】 这三个方程的系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=-(a^3+b^3+c^3-3abc)$$
$$=-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=-(a+b+c)[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2].$$

由假设，$\Delta\neq 0$，故此三平面有唯一交点，即可作为一个三棱锥的三个侧面。再设

$$A=bc-a^2,\ B=ca-b^2,\ C=ab-c^2,$$

则第二与第三平面；第三与第一平面；第一与第二平面所成的棱的方向数分别是 $A,\ B,\ C$；$B,\ C,\ A$ 和 $C,\ A,\ B$。于是它们的方向余弦可以写作

$$\frac{A}{\varepsilon_1 k},\ \frac{B}{\varepsilon_1 k},\ \frac{C}{\varepsilon_1 k};\ \frac{B}{\varepsilon_2 k},\ \frac{C}{\varepsilon_2 k},\ \frac{A}{\varepsilon_2 k}$$

和
$$\frac{C}{\varepsilon_3 k},\ \frac{A}{\varepsilon_3 k},\ \frac{B}{\varepsilon_3 k}.$$

这里 $\varepsilon_1=\pm 1,\ \varepsilon_2=\pm 1,\ \varepsilon_3=\pm 1,\ k=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

当取 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon\,(\varepsilon=\pm 1)$ 时，这三个棱每两个的夹角的余弦都是 $\frac{1}{k^2}(BC+CA+AB)$。因此这三个平面必形成一个正三棱锥的侧面。

设轴上一个向量的方向余弦是 $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$。当取 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon\,(\varepsilon=\pm 1)$ 时，三个棱上三条射线的方向余弦分别是

$$\frac{A}{\varepsilon k},\ \frac{B}{\varepsilon k},\ \frac{C}{\varepsilon k};\ \frac{B}{\varepsilon k},\ \frac{C}{\varepsilon k},\ \frac{A}{\varepsilon k}$$

和
$$\frac{C}{\varepsilon k},\ \frac{A}{\varepsilon k},\ \frac{B}{\varepsilon k},$$

于是利用它们夹角余弦相等，得

$$\frac{1}{\varepsilon k}(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)$$

$$=\frac{1}{\varepsilon k}(B\cos\alpha+C\cos\beta+A\cos\gamma)$$

$$=\frac{1}{\varepsilon k}(C\cos\alpha+A\cos\beta+B\cos\gamma).$$

解之，得 $\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=1:1:1$，即轴的方向数是 1，1，1.

习　题　3·6

1．讨论下列每组平面的相关位置:

(1) $x+y+4z=5$, $x+3y+6z=1$, $2x-5y+z=3$;

(2) $3x+4y+6z=5$, $6x+5y+9z=10$, $3x+3y+5z=5$;

(3) $x+y+z=6$, $2x+3y+4z=20$, $x-y+z=2$;

(4) $x-y+2z=1$, $2x-2y+4z=-5$, $3x-3y+6z=4$;

(5) $3x-y+z=5$, $2x+4y+z=-10$, $6x-2y+2z=-9$.

2．求三平面

$$x=cy+bz,\ y=az+cx,\ z=bx+ay$$

共线的充要条件.

3．确定 a 和 b 的数值，使三平面 $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+b=0$, $x+ay-6z+10=0$ (1)共点; (2)共线; (3)两两相交成三条平行线.

4．讨论下列三平面的相关位置:

(1) $x+ay+(b+c)z+d=0$; (2) $x+by+(c+a)z+d=0$;

(3) $x+cy+(a+b)z+d=0$.

*5．讨论下列三平面的相关位置:

(1) $x+y+z=1$; (2) $ax+by+cz=k$; (3) $a^2x+b^2y+c^2z=k^2$.

6．设

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix},\quad \Delta_a=\begin{vmatrix}b_1&c_1&d_1\\b_2&c_2&d_2\\b_3&c_3&d_3\end{vmatrix},$$

$$\Delta_b=\begin{vmatrix}a_1&c_1&d_1\\a_2&c_2&d_2\\a_3&c_3&d_3\end{vmatrix},\quad \Delta_c=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}.$$

求证:

(1) $R_O=R_A=3\Leftrightarrow\Delta\neq0$;

(2) $R_O=R_A=2\Leftrightarrow\Delta=\Delta_a=\Delta_b=\Delta_c=0$;

(3) $R_O=R_A=1\Leftrightarrow a_1:b_1:c_1:d_1=a_2:b_2:c_2:d_2=a_3:b_3:c_3:d_3$.

*7. 求证三角形三边的中垂面共线.

[提示: 取三顶 $A_r(x_r, y_r, z_r)$ $(r=1, 2, 3)$利用第一节例3.]

第七节 平 面 族

我们知道:三个条件可以唯一地确定一平面,所以适合两个条件的平面的方程通常含有一个参数,这个参数的值如改变,则所表示的平面也随之改变. 由于这些平面都适合某种特定条件,它们之间必有一定的内在联系. 我们把这样的方程所表示的许多平面叫做*平面族*或*平面系*. 同理,适合一个条件的平面,它的方程含有两个参数也叫平面族. 下面介绍几种平面族.

7·1 与一个平面平行的平面族

首先证明

定理1 方程

$$ax+by+cz+k=0 \quad (-\infty<k<\infty) \tag{1}$$

表示和定平面

$$ax+by+cz+d=0, \quad a^2+b^2+c^2\neq0 \tag{2}$$

平行的平面族,这里 k 是参数. 反过来,和(2)平行的平面族的方程可以写作(1).

【证】 1. 由于(1)和(2)的一次项系数相同,且(1)为三元一次方程,故(1)表示与(2)平行的平面,当 k 变化时,(1)表示无数个平面,故(1)表示和(2)平行的平面族.

2．现证所有和(2)平行的平面都可以写成(1)．设有一个平面π和(2)平行，在π上取一点$P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，过P_0和(2)平行的平面也就是平面π，它的方程是

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

或
$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0.$$

此即(1)的形式，其中$k=-(ax_0+by_0+cz_0)$．】

【例1】 求与平面$ax+by+cz+d=0$平行，且在三个坐标轴上的截距的代数和是常数m的平面的方程．

解：设$ax+by+cz+k=0$是所求的平面，令$y=z=0$，则得x轴上的截距$=-\dfrac{k}{a}$．同理可得：它在y轴及z轴上的截距分别是$-\dfrac{k}{b}$和$-\dfrac{k}{c}$．由假设

$$-\frac{k}{a}-\frac{k}{b}-\frac{k}{c}=m,$$

从而得
$$k=-\frac{mabc}{bc+ca+ab},$$

将k值代入所设方程中，即得所求平面的方程

$$ax+by+cz-\frac{mabc}{bc+ca+ab}=0.$$

7·2 平面束

过一直线的平面族叫做*平面束*．下面推求它的方程．

定理2 方程

$$\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,$$
$$\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq0,\ -\infty<\lambda_1,\ \lambda_2<+\infty. \tag{3}$$

表示过两个相交定平面

$$\pi_1:\ u_1\equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ \ a_1^2+b_1^2+c_1^2\neq0 \tag{4}$$

和

$$\pi_2:\quad u_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,\quad a_2^2+b_2^2+c_2^2\neq 0 \tag{5}$$

的交线 l 的平面束，这里 λ_1，λ_2 是参数[注]．反过来，过 π_1 和 π_2 的交线的平面束的方程可以写作(3)．

【证】 1．先证方程 (3) 关于任一对确定的实数 λ_1，λ_2 $(\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0)$来说，表示一个平面．将方程(3)改写作

$$(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2)x+(\lambda_1b_1+\lambda_2b_2)y$$
$$+(\lambda_1c_1+\lambda_2c_2)z+\lambda_1d_1+\lambda_2d_2=0.$$

对这个三元一次方程，只要证明

$$(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2)^2+(\lambda_1b_1+\lambda_2b_2)^2+(\lambda_1c_1+\lambda_2c_2)^2\neq 0,$$

它就表示一个平面．我们用反证法来证：如果 $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2=0$，$\lambda_1b_1+\lambda_2b_2=0$，$\lambda_1c_1+\lambda_2c_2=0$，则得

$$a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2=-(\lambda_2:\lambda_1).$$

即 π_1 与 π_2 平行，这不可能．故 (3) 对于一对定实数 λ_1，λ_2 $(\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0)$来说，必定表示一个平面．

下面再证方程 (3) 所表示的平面必过 π_1 和 π_2 的交线 l．在 l 上任取一点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，于是

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1=0,\quad a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2=0.$$

因此对于(3)中给定的一个平面，它所对应的一对实数 λ_1、λ_2，必有

$$\lambda_1(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1)$$
$$+\lambda_2(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2)=0.$$

由于 P_0 的任意性，这就证明了这个平面必过 l．

2．最后证明：过交线 l 的任意平面 π 的方程都包括在方程(3)内．对过 l 的 π_1 可取 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$；对过 l 的 π_2 可取 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$．若 π 既不是 π_1 又不是 π_2，则取 π 中不在 l 上

[注] 这里 λ_1，λ_2 是两个不独立的参数，当 $\lambda_1\neq 0$，$\lambda_2\neq 0$ 时，$\lambda_1:\lambda_2$ 可以看作是一个独立参数．

的一点 $A(\alpha, \beta, \gamma)$，于是

$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma+d_1\neq 0,\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2\neq 0.$$

这时 π 可由 l 及 A 唯一确定. 过 l 的平面 (3) 如果通过 A, 则有

$$\lambda_1(a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma+d_1)+\lambda_2(a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2)=0.$$

由于括弧中的数都不是零, 故有

$$\lambda_1:\lambda_2=-(a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2):(a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma+d_1).$$

这时 π 的方程即可由

$$(a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2)(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)$$
$$-(a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma+d_1)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

来表示. 于是过 l 的任何平面都可以写成(3)的形式. ∎

注意 1. 如果 $\lambda_1\neq 0$, 令 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\lambda$, 则方程(3)就可变形为

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0, \qquad (6)$$

这样, (6)比(3)更便于应用, 只是(6)中不含平面 π_2.

2. 用平面的简记法, 平面束方程可以写作

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0. \qquad (7)$$

这里 $u_1=0$ 和 $u_2=0$ 叫做平面束的基面.

【例 2】 求过两个相交平面(4)和(5)的交线, 并与三个坐标面分别垂直的平面的方程(假定交线与三个坐标面都不垂直).

解: 将(4)和(5)分别写成

$$\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{p}+d_1=0 \quad 和 \quad \boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{p}+d_2=0.$$

于是 $\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2=\{b_1c_2-b_2c_1,\ c_1a_2-c_2a_1,\ a_1b_2-a_2b_1\}\neq\boldsymbol{0}$ 将是交线上的一个向量.

1. 交线不与 yz 面垂直, 也就是不与 x 轴平行, 故得

$$(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\neq 0, \qquad (A)$$

设(3)为所求的与 yz 面垂直的平面，即

$$(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2)x+(\lambda_1b_1+\lambda_2b_2)y$$
$$+(\lambda_1c_1+\lambda_2c_2)z+\lambda_1d_1+\lambda_2d_2=0$$

与 $x=0$ 垂直．由本章第五节(6)知 $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2=0$．当 $a_1\neq0$，$a_2\neq0$ 时，则得 $\lambda_1:\lambda_2=a_2:-a_1$，代入(3)，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y+(a_1c_2-a_2c_1)z+a_1d_2-a_2d_1=0.$$

由(A)式知：此式即为所求的平面．当 $a_1=0$，$a_2\neq0$ 时，则 $\lambda_2=0$，λ_1 表示任意数，代入(3)，得 $b_1y+c_1z+d_1=0$．由(A)得 $b_1^2+c_1^2\neq0$．当 $a_1\neq0$，$a_2=0$ 时，则 $\lambda_1=0$，λ_2 表示任意数，代入(3)，得 $b_2y+c_2z+d_2=0$．由(A)得 $b_2^2+c_2^2\neq0$．当 a_1 与 a_2 都等于0时，则由(A)可知不存在这种情况．

2．过交线分别与 zx 面及 xy 面垂直的平面，留作练习，读者试自行补上．

我们将过一直线且与坐标面垂直的平面叫做这条直线在坐标面上的投射平面．

利用平面束可以解决三个平面共线的问题．

定理3 三个不同的平面

$$\pi_r:\ u_r\equiv a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0\quad(r=1,\ 2,\ 3),$$

两两相交，则共线的充要条件是：存在三个都不是零的数 k_1、k_2、k_3，使

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3\equiv0. \tag{8}$$

【证】 1．必要条件 过 π_1 和 π_2 的交线的平面束是 $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0$，由于 $u_1=0$，$u_2=0$ 和 $u_3=0$ 共线，故 π_3 必是这平面束中的某一个平面．若取 $\lambda_1=k_1\neq0$，$\lambda_2=k_2\neq0$ 可得 π_3，则 $k_1u_1+k_2u_2=0$ 与 $u_3=0$ 必表示同一个平面，于是

$$k_1u_1+k_2u_2\equiv-k_3u_3\quad(k_3\neq0),$$

移项后即得(8)式．

2. 充分条件　设(8)成立，则 $k_1u_1+k_2u_2\equiv-k_3u_3$. 如果 k_1、k_2 和 k_3 都不等于 0，则 $k_1u_1+k_2u_2=0$ 表示过 π_1 和 π_2 的交线、且与 π_1 和 π_2 都不相同的平面，而这平面就是 $-k_3u_3=0$ 或 $u_3=0$，即 π_3. 故知 π_1、π_2 和 π_3 共线.

【例 3】　试证经过不是三个直三面角（即三个面都不两两垂直）的三棱、且与对面垂直的平面共有三个，它们必共线.

【证】　设三面角的三个平面的方程是

$$u_r\equiv a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0 \quad (r=1,\ 2,\ 3).$$

且三个平面不两两垂直，即

$$\alpha_1=a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3\neq0,$$
$$\alpha_2=a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1\neq0,$$
$$\alpha_3=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\neq0.$$

设过 $u_2=0$ 和 $u_3=0$ 的交线与 $u_1=0$ 垂直的平面方程是 $k_2u_2+k_3u_3=0$，则由垂直条件得

$$k_2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)+k_3(a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1)=0.$$

即 $k_2\alpha_3+k_3\alpha_2=0$，于是这个平面是 $v_1\equiv\alpha_2u_2-\alpha_3u_3=0$，同理，过 $u_3=0$ 和 $u_1=0$ 的交线与 $u_2=0$ 垂直的平面是 $v_2\equiv\alpha_3u_3-\alpha_1u_1=0$，过 $u_1=0$ 和 $u_2=0$ 的交线与 $u_3=0$ 垂直的平面是 $v_3\equiv\alpha_1u_1-\alpha_2u_2=0$. 由于 $v_1+v_2+v_3\equiv0$，故这三个平面必共线. 】

7·3　过一定点的平面把

过空间一点的平面族叫做平面把（或平面汇）. 下面推求它的方程.

定理 4　方程

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,\quad a^2+b^2+c^2\neq0 \qquad (9)$$

表示过 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 的平面把，此处 $a,\ b,\ c$ 是参数. 反过

来，过 P_0 的平面把的方程必可以写成(9).

【证】 1. (9)式所表示的平面不论 a, b, c 值如何($a^2+b^2+c^2\neq 0$)显然必过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. 设 $Ax+By+Cz+D=0$ ($A^2+B^2+C^2\neq 0$) 是过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$的任意平面. 则得 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, 两式相减，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

此即(9)的形式，于是定理得证. 】

【例 4】 过四面体 $ABCD$ 的重心 G, 任作一平面，分别交 DA、DB、DC 于 P、Q、R, 则

$$\frac{AP}{PD}+\frac{BQ}{QD}+\frac{CR}{RD}=\text{常数}.$$

【证】 设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, $G(x_g, y_g, z_g)$, 则由(9)知，过 G 的任意平面是

$$a(x-x_g)+b(y-y_g)+c(z-z_g)=0.$$

由本章第四节(8)得

$$\frac{AP}{PD}=-\frac{a(x_1-x_g)+b(y_1-y_g)+c(z_1-z_g)}{a(x_4-x_g)+b(y_4-y_g)+c(z_4-z_g)},$$

$$\frac{BQ}{QD}=-\frac{a(x_2-x_g)+b(y_2-y_g)+c(z_2-z_g)}{a(x_4-x_g)+b(y_4-y_g)+c(z_4-z_g)},$$

$$\frac{CR}{RD}=-\frac{a(x_3-x_g)+b(y_3-y_g)+c(z_3-z_g)}{a(x_4-x_g)+b(y_4-y_g)+c(z_4-z_g)}.$$

所以

$$\frac{AP}{PD}+\frac{BQ}{QD}+\frac{CR}{RD}$$

$$=-\frac{\left[\begin{array}{c}a(x_1+x_2+x_3-3x_g)+b(y_1+y_2+y_3-3y_g)\\+c(z_1+z_2+z_3-3z_g)\end{array}\right]}{a(x_4-x_g)+b(y_4-y_g)+c(z_4-z_g)}.$$

但
$$x_g=\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4),$$
$$y_g=\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4),$$
$$z_g=\frac{1}{4}(z_1+z_2+z_3+z_4).$$
所以
$$x_1+x_2+x_3-3x_g=-(x_4-x_g),$$
$$y_1+y_2+y_3-3y_g=-(y_4-y_g),$$
$$z_1+z_2+z_3-3z_g=-(z_4-z_g).$$
于是得 $\frac{AP}{PD}+\frac{BQ}{QD}+\frac{CR}{RD}=1$. ∎

*7·4 过三个平面的交点的平面把

定理5 方程
$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0,\quad \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\neq0$$
$$(-\infty<\lambda_1、\lambda_2、\lambda_3<+\infty)\tag{10}$$
表示过三个相交平面
$$\pi_r:\ u_r\equiv a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0,\ a_r^2+b_r^2+c_r^2\neq0\quad(r=1,\ 2,\ 3)\ (11_r)$$
的交点 P_0 的平面把，这里 λ_1、λ_2、λ_3 是参数. 反过来，过 π_1、π_2 和 π_3 交点的平面把的方程可以写作(10).

【证】 1. 证明与定理2中第一部分完全类似. 作为练习，留给读者自行补上.

2. 要证明过 P_0 的任意一平面 π 的方程都包括在方程(10)内. 如果 π 是 π_1 或 π_2 或 π_3，则分别取 $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$ 或 $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq0$, $\lambda_3=0$ 或 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3\neq0$ 就可以了. 当 π 不是 π_1、π_2 和 π_3 中的一个平面，则取 π 中与 P_0 不同的两点 $A_1(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)$ 和 $A_2(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)$，且使 A_1A_2 联线不过 P_0 点，故有
$$u_r(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)\equiv a_r\alpha_1+b_r\beta_1+c_r\gamma_1+d_r\neq0\quad(r=1,\ 2,\ 3),$$
$$u_r(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)\equiv a_r\alpha_2+b_r\beta_2+c_r\gamma_2+d_r\neq0\quad(r=1,\ 2,\ 3).$$
当 A_1, A_2, P_0 共线时，A_1A_2 与 π_1, π_2 和 π_3 的交点都是 P_0，根据

本章第四节定理2(8)，得

$$-\frac{u_1(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)}{u_1(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)}=-\frac{u_2(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)}{u_2(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)}$$

$$=-\frac{u_3(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)}{u_3(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)}=\frac{A_1P_0}{P_0A_2}.$$

反过来也成立．于是 P_0, A_1, A_2 不共线，表示上式不成立．

这时 π 可由 A_1, A_2, P_0 唯一确定．过 P_0 的平面如果通过 A_1 和 A_2，则分别有

$$\lambda_1u_1(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)+\lambda_2u_2(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)+\lambda_3u_3(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)=0,$$

$$\lambda_1u_1(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)+\lambda_2u_2(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)+\lambda_3u_3(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)=0.$$

因此，由附录第三节定理5，

$$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=\begin{vmatrix}u_2(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1) & u_3(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)\\ u_2(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2) & u_3(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)\end{vmatrix}$$

$$:\begin{vmatrix}u_3(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1) & u_1(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)\\ u_3(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2) & u_1(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)\end{vmatrix}$$

$$:\begin{vmatrix}u_1(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1) & u_2(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)\\ u_1(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2) & u_2(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)\end{vmatrix}.$$

这三个二阶行列式中至少有一个不是零．这时 π 的方程即可由

$$u_1\begin{vmatrix}u_2(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1) & u_3(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)\\ u_2(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2) & u_3(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)\end{vmatrix}$$

$$+u_2\begin{vmatrix}u_3(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1) & u_1(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)\\ u_3(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2) & u_1(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)\end{vmatrix}$$

$$+u_3\begin{vmatrix}u_1(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1) & u_2(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)\\ u_1(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2) & u_2(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)\end{vmatrix}=0$$

或

$$\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ u_1(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1) & u_2(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1) & u_3(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)\\ u_1(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2) & u_2(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2) & u_3(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)\end{vmatrix}=0$$

来表示．于是过 P_0 的任一平面都可以写成(10)的形式．】

注意 $u_1=0$, $u_2=0$ 和 $u_3=0$，叫做平面把(10)的基面．

【例5】 求过三个平面 (π_r) $(r=1,\ 2,\ 3)$ 的交点且与常向量 $\boldsymbol{k}=\{k_1,\ k_2,\ k_3\}$ 垂直的平面方程．

解：设(10)为所求，则此平面法向量将是

$$\boldsymbol{m}=\{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3,\ \lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\lambda_3b_3,\\ \lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\lambda_3c_3\},$$

由于 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 平行，则由第二章第九节定理 6 的推论 1 可知：

$$\frac{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3}{k_1}=\frac{\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\lambda_3b_3}{k_2}\\=\frac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\lambda_3c_3}{k_3}=s,$$

即

$$\begin{cases}\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_5a_3=k_1s,\\ \lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\lambda_3b_3=k_2s,\\ \lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\lambda_3c_3=k_3s.\end{cases}$$

由于 π_1, π_2 和 π_3 交于一点，即知

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq0,$$

因此 λ_1, λ_2, λ_3 可唯一确定，解之，得

$$\lambda_1=\frac{s}{\Delta}\begin{vmatrix}k_1&a_2&a_3\\k_2&b_2&b_3\\k_3&c_2&c_3\end{vmatrix},\qquad \lambda_2=\frac{s}{\Delta}\begin{vmatrix}a_1&k_1&a_3\\b_1&k_2&b_3\\c_1&k_3&c_3\end{vmatrix},$$

$$\lambda_3=\frac{s}{\Delta}\begin{vmatrix}a_1&a_2&k_1\\b_1&b_2&k_2\\c_1&c_2&k_3\end{vmatrix}.$$

故所求的平面方程是

$$\begin{vmatrix}k_1&a_2&a_3\\k_2&b_2&b_3\\k_3&c_2&c_3\end{vmatrix}u_1+\begin{vmatrix}a_1&k_1&a_3\\b_1&k_2&b_3\\c_1&k_3&c_3\end{vmatrix}u_2+\begin{vmatrix}a_1&a_2&k_1\\b_1&b_2&k_2\\c_1&c_2&k_3\end{vmatrix}u_3=0.$$

利用平面把也可以解决四个平面共点的问题．仿照定理 3，有

定理 6 设有四个不同的平面

$$\pi_r: \quad u_r \equiv a_r x + b_r y + c_r z + d_r = 0,$$

$$a_r^2 + b_r^2 + c_r^2 \neq 0 \quad (r = 1, 2, 3, 4),$$

其中任意两个不平行，任意三个不共线，则共点的充要条件是：存在四个都不是零的数 k_1、k_2、k_3、k_4，使

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + k_4 u_4 \equiv 0. \tag{12}$$

证明作为练习，留给读者试自行补上.

*【例 6】 在定理 6 的假设下共点的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

【证】 (12)式可以写作

$$(k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4) x + (k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 + k_4 b_4) y$$
$$+ (k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 + k_4 c_4) z + k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + k_4 d_4 \equiv 0,$$

因此有

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4 = 0,$$
$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 + k_4 b_4 = 0,$$
$$k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 + k_4 c_4 = 0,$$
$$k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 + k_4 d_4 = 0.$$

又此四元齐次方程组有非零解的充要条件是 (13)（见附录第三节定理 3）。但 k_1, k_2, k_3, k_4 中若有一个是零，则由 (12) 可知三个平面共线，这是不可能的；若有两个是零，则由(12)知两个平面重合，这也是不可能的；若有三个是零，则由(12)知一个平面的方程系数都是零，这仍是不可能的。因此 k_1, k_2, k_3, k_4 都不是零。

习 题 3·7

1. 求过(3, 2, −1)且与 $7x - y + z = 14$ 平行的平面方程.
2. 求过三个平面 $x = 3$, $x + y = 5$ 及 $x + y + z = 4$ 的交点，且与 $7x - y + z = 14$ 平行的平面方程.

3. 求过两个相交平面 $2x+y-4=0$ 及 $y+2z=0$ 的交线，并且(1)过点$(2,-1,1)$的平面方程；(2)与 $3x+2y-3z=0$ 垂直的平面方程。

4. 求过两个相交平面 $2x+y-z=4$ 及 $x-y+2z=0$ 的交线在三个坐标面上的投射平面(即相垂直的平面)方程。

5. 已知四面体 $OP_1P_2P_3$ 的三个顶点 $P_r(x_r, y_r, z_r)$ $(r=1, 2, 3)$. 求过原点和对面平行的平面方程。

6. 求过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与常向量 $\alpha=\{a_1, a_2, a_3\}$ 垂直的平面方程。

7. 用平面束证明：三个平面

$$u_1\equiv x+2y-z+3=0,\ u_2\equiv 3x-y+2z+1=0,$$
$$u_3\equiv 2x-3y+3z-2=0$$

共线。

8. 求与平面 $2x+6y+3z-8=0$ 平行的平面方程，并使此平面在三个坐标面上的交线所围成的三角形的面积是 $\frac{7}{8}$.

9. 已知四面体的四个面是

$$u_r\equiv a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0,\ a_r^2+b_r^2+c_r^2\neq 0\quad (r=1, 2, 3, 4).$$

求过每个顶点与对面平行的平面方程。

10. 已知两个平面 $u=0$ 及 $v=0$ 相交，求证平面 $\lambda u+\mu v=0$ 不论 λ, μ 的值如何，永远包含一条定直线。

11. 已知三个平面 $u=0, v=0$ 及 $w=0$ 共点，求证平面 $\lambda u+\mu v+\nu w=0$ 不论 λ, μ, ν 的值如何，永远包含一个定点。

*12. 用平面束证明三角形各边的中垂面必共线. [提示：参看本章第一节例 3.]

*13. 在坐标轴上分别取 A, A'; B, B'; C, C' 诸点. 如果平面 $A'BC$ 及 $AB'C'$, $B'CA$ 及 $BC'A'$, $C'AB$ 及 $CA'B'$ 都相交，则三条交线必共面. [提示：用截距式并用平面束.]

本 章 提 要

1. 平面方程的各种形式

(1) 坐标形式和向量形式的点法式、普遍式、三点式、截距式、参数式、法线式；

(2) 注意方程中每个量是常量还是变量或是参数;

(3) 注意方程中每个量的几何意义;

(4) 注意同一种形式中的向量形式和坐标形式的互化，每两种形式的互化;

(5) 三条件确定一平面.

2. 点和平面的关系

(1) 度量关系: (a)平面到点的有向距离和距离; (b)两点所定的直线与定平面的交点分这两点所成线段的比.

(2) 位置关系: (a)平面不过原点时，一点和原点在平面同侧或异侧; (b)两点在平面同侧或异侧; (c)平面分空间成正半空间和负半空间.

3. 两平面的关系

(1) 位置关系分三种: (a)用普遍式来判定; (b)用秩来判定.

(2) 度量关系: (a) 相交平面的交角; (b) 相交平面的两个平分角面.

***4. 三个平面的位置关系分八种,用秩来判定.**

5. 平面族

(1) 与一定平面平行的平面族方程;

(2) 过两个平面交线的平面束方程;

(3) 过一定点的平面把方程;

(4) 过三个平面交点的平面把方程.

复 习 题 三

1. 方程 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{p}+d=0$ 在下列条件下是怎样的?

   (1) 过原点; (2)平行于 x 轴; (3)过 x 轴; (4)平行于 xy 面.

2. 求原点到平面 $x+y+z=k$ 的距离和法线向量的方向角.

3. 若平面关于三个坐标面成等角且与原点的距离是 p, 求这平面的方程.

4. 在平面 $ax+by+cz+d=0$, $a^2+b^2+c^2\neq0$ 内求一点 P_0, 使 $\overrightarrow{OP_0}$ 的三个方向角是 60°、60° 和 45°.

5. 在平面 $ax+by+cz+d=0$, $a^2+b^2+c^2\neq0$ 内求一点 P_0, 使 $\overrightarrow{OP_0}$ 的方向角(1)相等; (2)分别是 α, β, γ; (3)与 x 轴和 y 轴所成的方向

角中前两个分别是 α 和 β.

6. 求证平面 $ax+by+cz+d=0$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$ 内任意两点所作成的直线上的任意点也都在此平面内.

7. 从原点作长度为 p 的三条等长有向线段 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$, 它们的方向余弦分别是 λ, μ, ν; μ, ν, λ 和 ν, λ, μ. 过 A, B, C 分别作与 OA, OB, OC 垂直的平面,求这三个平面的交点.

8. 在三个坐标轴上各求一点, 使它到平面 $ax+by+cz+d=0$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$ 的距离为 $k(k>0)$.

9. 在三个坐标轴上各求一点,使它到两个平面

$$x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1=0$$

和

$$x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-p_2=0$$

的距离相等.

10. 求证: 以定平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 与坐标轴的三个交点所构成的三角形为底, 以定点(x_0, y_0, z_0)为顶的三角锥的体积与 $\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}-1$ 成比例.

11. 已知两个相交平面

$u_1\equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 和 $u_2\equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.

求过它们的交线并在下列条件下的平面方程: (1)过原点; (2)过不在 $u_1=0$ 及 $u_2=0$ 上的点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$; (3) 与 $u\equiv ax+by+cz=0$ 垂直,但 $u=0$ 与 $u_1=0$ 不垂直, $u=0$ 与 $u_2=0$ 不垂直.

12. 用数量积推求点到平面的距离.

13. 已知一三角形, 过其重心作任一平面, 试证此平面到此三角形的三个顶点的有向距离的代数和必是零,并推广到四面体进行考虑.

14. 已知 n 个定点,过其平均中心作任一平面, 试证此平面到此 n 个点的有向距离的代数和必是零.

15. 求证 $|x|+|y|+|z|=a(a>0)$表示一个正八面体的八个面的方程, 并求此八面体的表面积和体积.

16. 两个平面互相垂直, 由此两平面外的任一点到这两平面作垂线, 试证它们的垂足的联线必与两平面的交线垂直.

17. 求证 $x+2y-z=0$, $y+7z-2=0$, $x-2y-z-4=0$, $x+3y+z-4=0$

和 $3x+3y-z-8=0$ 五个平面围成一个四棱锥.

18．试就两个平面在坐标轴上的截距，讨论这两个平面的相关位置及相应的判别条件.

19．求与点$\left(0,\ 0,\ \frac{a}{2}\right)$及平面 $z=-\frac{a}{2}$ 等距的点的轨迹方程.

20．求到两个平行平面的距离之比为常数的点的轨迹方程.

21．求到两个相交平面的距离之比为常数的点的轨迹方程.

22．已知两个定点 A 和 B，又知动点 P. $\overrightarrow{OP}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 上的射影的大小的代数和是常数，求 P 的轨迹方程，并推广到 n 个定点的情况.

23．已知两个平面相交，求证过交线仅有一个平面使它的法向量为已知向量.

24．已知三个平面相交，求证过交点仅有一个平面使它的法向量为已知向量.

25．设有 $u_r=a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0,\ a_r^2+b_r^2+c_r^2\neq0\,(r=1,2)$，且 $u_1=0$ 和 $u_2=0$ 相交，则 $k_1u_1+k_2u_2+k_3=0$ 表示平行于它们的交线的平面族，这里 $k_1,\ k_2$ 和 k_3 是参数.

*26．求由四个平面

$$u_r=a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0,\ a_r^2+b_r^2+c_r^2=0\quad(r=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

所围成的四面体的体积.

[提示：四个顶点是$\frac{x_r}{A_r}=\frac{y_r}{B_r}=\frac{z_r}{C_r}=\frac{1}{D_r}$，这里 $A_r,\ B_r,\ C_r,\ D_r$ 是

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

中的 $a_r,\ b_r,\ c_r,\ d_r$ 的代数余子式.]

*27．设 $\boldsymbol{N}_r^0\ (r=1,\ 2,\ 3)$ 是两两垂直的单位向量，推求三个平面 $\boldsymbol{N}_r^0\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=p_r$ 的交点.

[提示：利用 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0=\lambda_1\boldsymbol{N}_1^0+\lambda_2\boldsymbol{N}_2^0+\lambda_3\boldsymbol{N}_3^0$ 来确定 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$.]

*28．求证通过四面体的每个棱及对棱中点的平面共有六个，它们必共点.

[提示：用平面束.]

*29. 已知由三对平行平面

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1'=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2'=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3'=0 \end{cases}$$

围成一个平行六面体，原点及 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 都不在此六个平面上，求(1)原点位于内部的充要条件；(2)$P_0(x_0, y_0, z_0)$位于内部的充要条件；(3)原点恰是对称心的充要条件；(4)$P_0(x_0, y_0, z_0)$恰是对称心的充要条件。

[提示：(2)和(4)用平移.]

*30. 已知两相交平面

$$u_r \equiv x\cos\alpha_r + y\cos\beta_r + z\cos\gamma_r - p_r = 0 \quad (r=1, 2);$$

又知两相交平面

$$v_r \equiv u_1 + \lambda_r u_2 = 0 \quad (r=1, 2).$$

当 $u_1=0$、$v_1=0$ 的交角与 $u_2=0$、$v_2=0$ 的交角相等时，求 λ_1 和 λ_2 所应适合的条件。

思 考 题 三

1. 从两平面交线的平面束中任意取两个平面作基面，必产生原平面束；从三平面交点的平面把中任意取三个平面作基面，必产生原平面把．试分别加以证明．

2. 设任一直线与一平面束中的四个平面交于 A、P、B、Q 四点．求证 $\dfrac{AP\cdot QB}{AQ\cdot PB}=$常数．

   [提示：利用本章第四节(8)，这常数叫做四平面的交比.]

3. 推求三元二次方程

$$\phi(x, y, z) \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$$

   表示一对平面的充要条件，并就各种相关位置加以讨论．当它表示一对实的相交平面时，并求它们的夹角．

4. 讨论四个平面 $a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0$，$a_r^2+b_r^2+c_r^2\neq 0 (r=1, 2, 3, 4)$ 的相关位置．

5. 讨论不等式组 $a_rx+b_ry+c_rz+d_r\geqq 0\ (r=1,\ 2,\ 3,\ 4)$能围成四面体的充要条件. 从而证明不等式组 $2x-y-z\geqslant 0$, $-x+2y-z\geqslant 0$, $-x-y+2z\geqslant 0$, $x+y+z-1\leqslant 0$ 围成一个四面体.

第四章

空间直线

本章首先将空间直线作为点的轨迹，利用向量法及坐标法建立空间直线方程的各种形式．然后讨论直线和平面以及两直线间的位置关系和度量关系．最后讨论直线和平面的结合问题．学习本章时也要先从平面解析几何里直线部分相应的内容来考虑．

第一节　空间直线方程的各种形式

1·1　直线方程的参数式、对称式和两点式

首先注意直线的一个性质，即直线可以看作是这样的点的轨迹：它上面任意一点与某一定点(也在它上面)所作的向量永远和某一常向量平行．根据这个特征，我们就能建立向量形式的直线方程．

已知直线 l, 又知和这直线平行的向量 $\boldsymbol{S}$(图 4-1) ($\boldsymbol{S}$ 叫方向向量)．在 l 上取一定点 P_0, 于是 l 就由 $\boldsymbol{S}$ 和 P_0 唯一确定，下面来建立它的方程．设 P 是 l 上任意一点，于是 $\overrightarrow{P_0P}$ 一定和 $\boldsymbol{S}$ 平行，因此它们的向量积等于零，也即

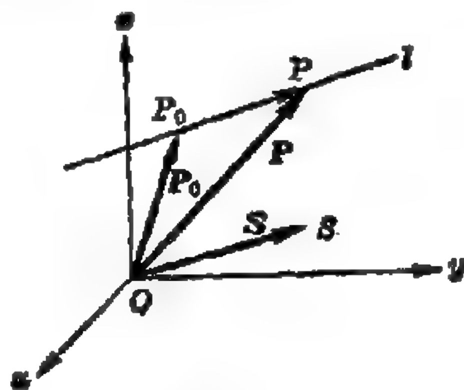


图　4-1

$$\overrightarrow{P_0P}\times\boldsymbol{S}=\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

或者由第二章第五节得

$$\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{S}\quad(-\infty<t<+\infty).\tag{2}$$

这里 t 是参数，它随 P 点在 l 上的位置而变，并且和 P 有着一一对应的关系. (2)也可以写作

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}\quad(-\infty<t<\infty).\tag{3}$$

应当注意：这里 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}_0$ 是位置向量，$\boldsymbol{S}$ 可以是自由向量，并且 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{S}$ 都是常向量，$\boldsymbol{P}$ 则是流动向量. 反过来，如果常向量 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{S}$ 及流动向量 $\boldsymbol{P}$ 适合(3)式，那么逆推回去就可以得到 $\overrightarrow{P_0P}\times\boldsymbol{S}=\boldsymbol{0}$，这就说明了 P 点必在直线 l 上. 因此，向量方程(3)就是直线 l 的方程. (3)叫做向量形式的直线方程的参数式或点向式. 下面将它化成坐标形式.

设 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$P(x,\ y,\ z)$，则有 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$，又设 $\boldsymbol{S}=\{l,\ m,\ n\}$，$l^2+m^2+n^2\neq0$，将(3)用坐标形式表示，就是

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt\quad(-\infty<t<\infty).\tag{4}$$

(4)叫做坐标形式的直线方程的参数式或点向式.

将上面的结果合并得：

定理1 过定点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 且与非零常向量 $\boldsymbol{S}=\{l,\ m,\ n\}$ 平行的直线，它的方程的向量形式是(3)，坐标形式是(4).

推论 过 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 而以 $l,\ m,\ n$ 为一组方向数的直线方程是

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.\tag{5}$$

此可由(4)消去 t 而得到. 方程(5)叫直线方程的对称式.

注意，只有坐标形式的对称式而没有向量形式的对称式.

特别地，当 $\boldsymbol{S}$ 表示一个单位向量 $\boldsymbol{S}^0$ 时，$l,\ m,\ n$ 将是与 $\boldsymbol{S}^0$ 同向的射线的方向余弦 $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$. 此时(3)和(4)

分别化成

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}^0 \quad (-\infty<t<+\infty); \tag{3'}$$

$$x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\cos\beta,\ z=z_0+t\cos\gamma$$
$$(-\infty<t<+\infty). \tag{4'}$$

必须注意：这时参数 t 有简单的几何意义：由于 $\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{S}^0$，则 t 就是有向线段 $\overrightarrow{P_0P}$ 的大小，也就是 t 表示动点 P 到定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的有向距离，且 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{S}^0$ 同向时，t 为正；反向时，t 为负。

【例 1】 求过定点 P_0 且与定平面 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}+d=0$ 垂直的直线方程的参数式。

解：因为 $\boldsymbol{m}$ 可以作为所求直线的方向向量，故由(3)得到所求直线方程的向量形式是

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{m} \quad (-\infty<t<+\infty).$$

【例 2】 求过定点 P_0，且与两条相交直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}_2$ 都垂直的直线方程。

解：因为所求直线与二相交直线垂直，故可取 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2$。由(3)得，所求直线方程的向量形式是

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2) \quad (-\infty<t<+\infty).$$

假定

$$\boldsymbol{P}_0=\{x_0, y_0, z_0\},\ \boldsymbol{S}_1=\{l_1, m_1, n_1\},\ \boldsymbol{S}_2=\{l_2, m_2, n_2\}.$$

于是 $\quad \boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=\{m_1n_2-m_2n_1,\ n_1l_2-n_2l_1,\ l_1m_2-l_2m_1\}$，

故所求直线方程的坐标形式是

$$x=x_0+(m_1n_2-m_2n_1)t,\quad y=y_0+(n_1l_2-n_2l_1)t,$$
$$z=z_0+(l_1m_2-l_2m_1)t.$$

【例 3】 已知直线 $l: \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 及其上的一个定点 P_1。(1) 在 l 上求与 P_0 距离为 1 的点；(2) 在 l 上求 P_1 关于 P_0 的对称点。

解：(1) 将方向向量 $\boldsymbol{S}$ 写作 $s\boldsymbol{S}^0$，这里 $s=|\boldsymbol{S}|$，于是已知方程可以写作 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+st\boldsymbol{S}^0$ 或 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t'\boldsymbol{S}^0$. 令 $t'=1$, 则所求点的位置向量是 $\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{S}^0$ 或 $\boldsymbol{P}_0-\boldsymbol{S}^0$.

(2) 将 $\boldsymbol{P}_1$ 代入 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t'\boldsymbol{S}^0$ 中，得到 $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_0+t'\boldsymbol{S}^0$,
于是

$$t'\boldsymbol{S}^0=\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0, \tag{A}$$

这里 t' 就是 P_1 点所对应的参数. 现在来求它的数值. 将(A)两边都数乘 $\boldsymbol{S}^0$，于是得

$$t'\boldsymbol{S}^0\cdot\boldsymbol{S}^0=(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0)\cdot\boldsymbol{S}^0,$$

即有

$$t'=(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0)\cdot\boldsymbol{S}^0.$$

如果 P_1 关于 P_0 的对称点是 P_2，则 P_2 点所对应的参数值将是 $-t'$, 即 $-(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0)\cdot\boldsymbol{S}^0$, 故得 P_2 点的位置向量是

$$\boldsymbol{P}_0-[(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0)\cdot\boldsymbol{S}^0]\boldsymbol{S}^0.$$

【例 4】 已知质点 $P(x, y, z)$，从点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 开始作等速运动，它的运动方程是

$$x=x_0+at,\ y=y_0+bt,\ z=z_0+ct,$$

这里 t 表时间. (1)求速度 v; (2)求 t_1 到 t_2 一段时间内所经过的距离.

解：(1) 设 s 表示质点 P 由 P_0 经过时间 t 所走的距离, 则有 $s=vt$. 已知方程可以写作

$$x=x_0+\left(\frac{a}{v}\right)s,\ y=y_0+\left(\frac{b}{v}\right)s,\ z=z_0+\left(\frac{c}{v}\right)s.$$

由于 s 表示距离，故 $\frac{a}{v}$, $\frac{b}{v}$, $\frac{c}{v}$ 表示一条射线的方向余弦，因此 $\left(\frac{a}{v}\right)^2+\left(\frac{b}{v}\right)^2+\left(\frac{c}{v}\right)^2=1$, 即有

$$v=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

(2) 设质点由 P_0 经过时间 t_1 和 t_2 所走的距离分别是 s_1

和 s_2，则有 $s_1=vt_1$，$s_2=vt_2$. 于是所求的距离是 s_2-s_1，即

$$vt_2-vt_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,(t_2-t_1).$$

【例 5】 设有两条相交直线

$$l_1: \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}_1^0$$

和 $$l_2: \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}_2^0.$$

求它们的两条平分角线的方程.

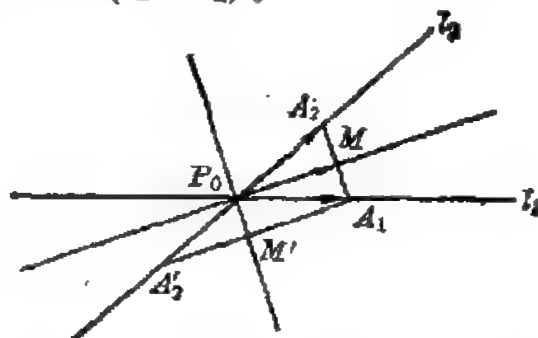


图 4-2

解：如图 4-2，在 l_1 和 l_2 上分别作 $\overrightarrow{P_0A_1}=\boldsymbol{S}_1^0$ 和 $\overrightarrow{P_0A_2}=\boldsymbol{S}_2^0$，取 A_1A_2 的中点 M，则 P_0M 就是一条平分角线. 下面推求它的方程. 由于

$$\overrightarrow{P_0M}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{P_0A_1}+\overrightarrow{P_0A_2})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{S}_1^0+\boldsymbol{S}_2^0),$$

故 P_0M 的方程是

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+\frac{t}{2}(\boldsymbol{S}_1^0+\boldsymbol{S}_2^0) \quad (-\infty<t<+\infty),$$

或 $$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+u(\boldsymbol{S}_1^0+\boldsymbol{S}_2^0) \quad (-\infty<u<+\infty).$$

同理，另一条平分角线 P_0M' 的方程是

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+u(\boldsymbol{S}_1^0-\boldsymbol{S}_2^0) \quad (-\infty<u<+\infty).$$

如果

$$\boldsymbol{S}_1^0=\{\cos\alpha_1,\ \cos\beta_1,\ \cos\gamma_1\},$$
$$\boldsymbol{S}_2^0=\{\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2\},$$
$$\boldsymbol{P}_0=\{x_0,\ y_0,\ z_0\}.$$

则两条平分角线的方程分别是

$$\begin{cases} x=x_0+u(\cos\alpha_1\pm\cos\alpha_2), \\ y=y_0+u(\cos\beta_1\pm\cos\beta_2), \\ z=z_0+u(\cos\gamma_1\pm\cos\gamma_2) \end{cases} \quad (-\infty<u<+\infty).$$

我们知道，已知两点 P_1 和 P_2，则可唯一地确定一条直

线，下面推求它的方程(图 4-3)．取 $\boldsymbol{S}=\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1$，于是(3)就可以写作

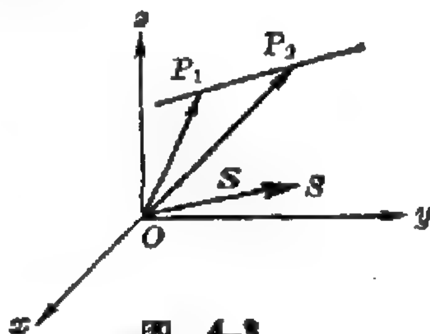


图 4-3

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)$$
$$(-\infty<t<\infty). \qquad (6)$$

(6)叫做向量形式的直线方程的两点式．下面将它化成坐标形式．

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，则 $\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$，将(6)用坐标形式表示，就是

$$x=x_1+t(x_2-x_1),\ y=y_1+t(y_2-y_1),\ z=z_1+t(z_2-z_1)$$
$$(-\infty<t<+\infty).$$

消去 t，得到

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (7)$$

(7)称为坐标形式的直线方程的两点式。

将上面的结果合并，得

定理 2 由两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 所定的直线方程的向量形式是(6)，坐标形式是(7)．

【例 6】 已知三角形的三顶点是 $P_r(x_r, y_r, z_r)$ $(r=1, 2, 3)$．求三条中线的方程．

解：设 P_2P_3，P_3P_1，P_1P_2 的中点分别是 M_1，M_2，M_3，则

$$\boldsymbol{M}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3)$$
$$=\left\{\frac{1}{2}(x_2+x_3),\ \frac{1}{2}(y_2+y_3),\ \frac{1}{2}(z_2+z_3)\right\};$$
$$\boldsymbol{M}_2=\left\{\frac{1}{2}(x_3+x_1),\ \frac{1}{2}(y_3+y_1),\ \frac{1}{2}(z_3+z_1)\right\};$$

$$M_3=\left\{\frac{1}{2}(x_1+x_2),\ \frac{1}{2}(y_1+y_2),\ \frac{1}{2}(z_1+z_2)\right\}.$$

利用(6)得中线 P_1M_1 的方程是

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+\frac{t}{2}(\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3-2\boldsymbol{P}_1)\quad(-\infty<t<+\infty),$$

或 $$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+u(\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3-2\boldsymbol{P}_1)\quad(-\infty<u<+\infty).$$

化成坐标形式,则得

$$\frac{x-x_1}{x_2+x_3-2x_1}=\frac{y-y_1}{y_2+y_3-2y_1}=\frac{z-z_1}{z_2+z_3-2z_1}.$$

同理可以推求其它两条中线 P_2M_2 和 P_3M_3 的方程.

*【例 7】 求三个不同的点 $P_r(x_r, y_r, z_r)$ $(r=1, 2, 3)$ 共线的充要条件.

解: 所求的充要条件就是 P_3 要落在 P_1、P_2 所作成的直线上,也就是 P_3 适合方程(7). 故有

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}.$$

如令其公比为 t, 则有

$$x_3=x_1(1-t)+x_2t,\ y_3=y_1(1-t)+y_2t,\ z_3=z_1(1-t)+z_2t.$$

再令 $1-t=-\frac{m_1}{m_3}$, $t=-\frac{m_2}{m_3}$, 则上面诸式化成

$$\begin{cases} m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3=0, \\ m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3=0, \\ m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3=0, \\ m_1+m_2+m_3=0. \end{cases}$$

这个以 m_1、m_2、m_3 为未知量的三元齐次方程组有非零解的充要条件是矩阵

$$M=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}$$

的秩小于 3(见附录第三节). 如果矩阵的秩是 1, 则 M 中所有二阶行

列式都是零，因此 $x_1=x_2=x_3$，$y_1=y_2=y_3$，$z_1=z_2=z_3$，也就是 P_1，P_2，P_3 三点重合，这不可能．故所求的充要条件是矩阵 M 的秩应为 2．

1·2 直线方程的普遍式和投射式

由第三章第五节可知：两平面

$$a_rx+b_ry+c_rz+d_r=0,\quad a_r^2+b_r^2+c_r^2\neq 0\quad (r=1,\ 2)$$

在 $\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2\neq\boldsymbol{0}$ 时必相交成一直线，这里 $\boldsymbol{m}_r=\{a_r,\ b_r,\ c_r\}$ $(r=1,\ 2)$．我们将

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, & a_1^2+b_1^2+c_1^2\neq 0;\ a_2^2+b_2^2+c_2^2\neq 0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0, & \text{且 } \dfrac{a_1}{a_2},\ \dfrac{b_1}{b_2},\ \dfrac{c_1}{c_2}\text{ 不全相等．}\end{cases}\tag{8}$$

称为坐标形式的直线方程的普遍式．化成向量形式得

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{P}+d_1=0,\\ \boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{P}+d_2=0.\end{cases}\quad\left(\begin{array}{l}\boldsymbol{m}_1\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{m}_2\neq\boldsymbol{0}.\\ \text{且 }\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2\neq\boldsymbol{0}.\end{array}\right)\tag{9}$$

下面来看如何将(8)化成对称式．设直线(8)的方向数是 l，m，n．又这两个平面的法线的方向数分别是 a_1，b_1，c_1 和 a_2，b_2，c_2．但这两条法线都与直线(8)垂直，故得

$$la_1+mb_1+nc_1=0;\quad la_2+mb_2+nc_2=0.$$

解之，得

$$l:m:n=b_1c_2-b_2c_1:c_1a_2-c_2a_1:a_1b_2-a_2b_1.$$

由于 $\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2\neq 0$，故

$$(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\neq 0.\tag{*}$$

再在直线(8)上任取一点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$（通常取直线(8)与某一个坐标轴或坐标面的交点)．这样即可将(8)化成对称式

$$\frac{x-x_0}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y-y_0}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z-z_0}{a_1b_2-a_2b_1}.\tag{10}$$

注意 因为直线上的一点 P_0 可以任意取，故化普遍式

为对称式，可得多种解答.

【例 8】 化直线的普遍式

$$4x+4y-5z=12,\quad 8x+12y-13z=32$$

成对称式.

解：设此直线的方向数是 l, m, n, 则

$$4l+4m-5n=0,\quad 8l+12m-13n=0.$$

解之，得 $$l:m:n=2:3:4.$$

今求已知直线与 $z=0$ 的交点. 在已知方程中，令 $z=0$, 则得 $4x+4y=12$, $8x+12y=32$. 解此两方程得 $x=1$, $y=2$, 故所求的对称式是

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{4}.$$

如果直线(8)与三个坐标面都不垂直时，则由第三章第七节例 2 知：可分别推求(8)在三坐标面上的投射平面为：

$$\begin{aligned}&(a_1b_2-a_2b_1)y-(c_1a_2-c_2a_1)z+a_1d_2-a_2d_1=0,\\&(a_1b_2-a_2b_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2\neq 0;\end{aligned}\tag{A}$$

$$\begin{aligned}&(b_1c_2-b_2c_1)z-(a_1b_2-a_2b_1)x+b_1d_2-b_2d_1=0,\\&(b_1c_2-b_2c_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\neq 0;\end{aligned}\tag{B}$$

$$\begin{aligned}&(c_1a_2-c_2a_1)x-(b_1c_2-b_2c_1)y+c_1d_2-c_2d_1=0,\\&(c_1a_2-c_2a_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2\neq 0.\end{aligned}\tag{C}$$

根据直线(8)的不同位置可分三种情况如下：

1. 当直线(8)与 xy 面不平行（见图 4-4），则(8)不能与 yz 面和 zx 面垂直，因此(A)与(B)必成立，且(8)可用(A)及(B)的交线来表示. 由于(8)与 xy 面不平行，则 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, 故(B)及(A)可以写作

$$x=\alpha z+p;\quad y=\beta z+q.\tag{11}$$

2. 当直线(8)与 xy 面平行，但与 y 轴不平行（见图 4-5），

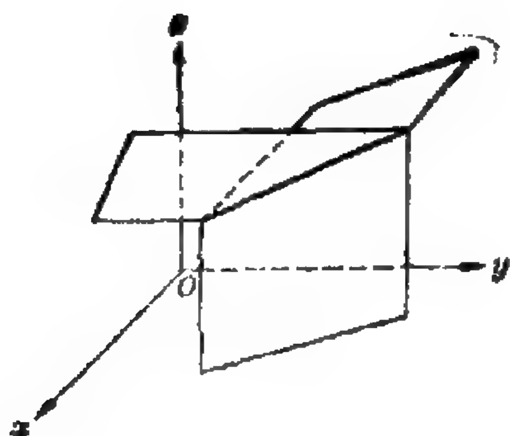


图 4-4

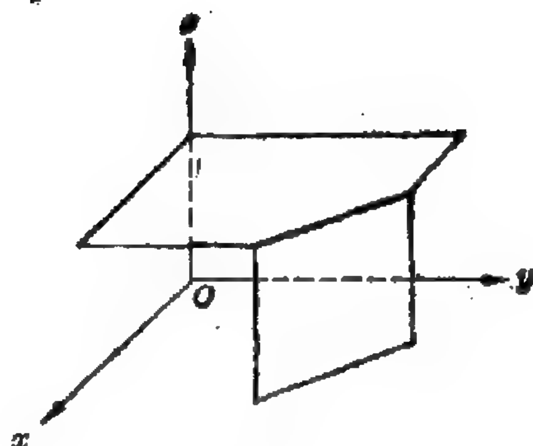


图 4-5

则(B)及(C)必成立，且(8)可用(B)及(C)的交线来表示．由于(8)与 xy 面平行，则 $a_1b_2-a_2b_1=0$，且(8)与 y 轴不平行，则 $b_1c_2-b_2c_1\neq0$，故(C)及(B)可以写作

$$y=ax+p;\quad z=q. \qquad (12)$$

3．当直线(8)与 y 轴平行(见图 4-6)，则(A)及(C)必成立，且(8)可用(A)及(C)的交线来表示．由于(8)与 y 轴平行，则 $a_1b_2-a_2b_1=0$，$b_1c_2-b_2c_1=0$，$c_1a_2-c_2a_1\neq0$，故(C)及(A)可以写作

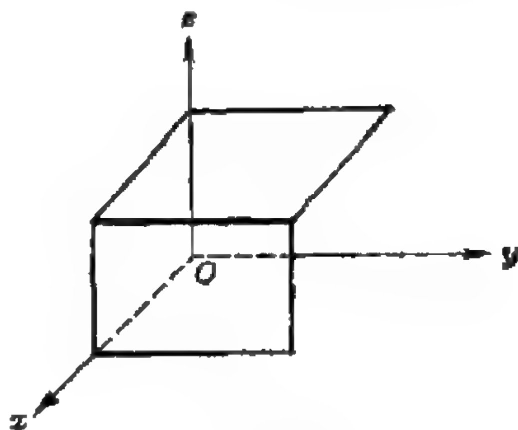


图 4-6

$$x=p;\quad z=q. \qquad (13)$$

总括起来，有

定理 3 设直线与 xy 面相交；或与 xy 面平行，但与 y 轴不平行；或与 y 轴平行，则它们的方程可分别写成(11)或(12)或(13)．

定义 方程(11)，(12)和(13)叫做直线方程的投射式．

【例 9】 化投射式(11)为对称式．

解：由(11)的第一式和第二式，分别得

$$\frac{x-p}{\alpha}=z \quad 和 \quad \frac{y-q}{\beta}=z.$$

合并即得 $$\frac{x-p}{\alpha}=\frac{y-q}{\beta}=\frac{z}{1}.$$

此直线的一组方向数为 α, β, 1.

1·3 四条件确定一空间直线

在平面解析几何里，我们知道：两个条件确定一条直线

$$ax+by+c=0, \quad a^2+b^2\neq 0.$$

在空间里，三个条件确定一个平面

$$ax+by+cz+d=0, \quad a^2+b^2+c^2\neq 0.$$

而空间直线需要几个条件才能确定呢？注意：在直线方程的对称式中，含有 l, m, n 和 x_0, y_0, z_0 六个参数，普遍式中则含有 a_1, b_1, c_1, d_1 和 a_2, b_2, c_2, d_2 八个参数，且它们都是不独立的。而在任意位置的直线的投射式(11)里，仅含有四个独立参数 α, β, p, q. 从而，我们得到一个重要结论：**四条件确定一空间直线**.

习 题 4·1

1. 求过两定点 $(1, -2, 1)$ 和 $(3, 1, -1)$ 的直线方程．并求这直线的方向向量.
2. 一直线过点 $(1,1,1)$ 且与一个向量平行，又此向量的方向角是 $60°$, $45°$, $120°$．求这条直线的方程.
3. 已知点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$．求过 P_0 与原点的直线方程，并求过 P_0 且与各坐标轴平行的直线方程.
4. 求过点 $(1,1,1)$，且平行于：(1)向量 $S=\{1,2,3\}$；(2)直线 $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$；(3)$x$ 轴；(4)直线 $x=t+1$, $y=t+1$, $z=t+1$ 的直线方程.

5. 化直线的普遍式

(1) $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$

成参数式.

6. 求证过空间两点 P_1 和 P_2 的直线方程可以写作

$$(1)\ (\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)\times(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)=0;$$

或　　$(2)\ (\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$，这里 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}=0$.

7. 已知四点 P_1, P_2, P_3, P_4, 其中无三点共线.

(1) 求直线 P_1P_3 与 P_2P_4 的方程的两点式;

(2) 求直线 P_1P_3 与 P_2P_4 平行的充要条件;

(3) 求直线 P_1P_3 与 P_2P_4 垂直的充要条件.

8. 动点 $P(x, y, z)$ 以定点 $P_0(3, -1, -5)$ 为起点, 沿向量 $\boldsymbol{S}=\{-2, 6, 3\}$ 的方向, 以速度 $v=21$ 作直线等速运动, 求它的运动方程.

9. 已知动点 $P(x, y, z)$ 作直线等速运动. 在 $t_1=0$ 到 $t_2=4$ 的时间内, 从点 $P_1(-7, 12, 5)$ 到点 $P_2(9, -4, -3)$, 求它的运动方程.

10. 试定 α, β, p, q, 使(11)过(1, 1, 0)及(2, 2, 1)两点.

11. 化直线方程的对称式(5)(假定 $n\neq 0$)成投射式(11).

12. 求二直线

$$\begin{cases} x=\alpha z+p \\ y=\beta z+q \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x=\alpha' z+p' \\ y=\beta' z+q' \end{cases}$$

垂直的充要条件.

*13. 求直线(4)与三个坐标面的交点. 这里 $lmn\neq 0$.

[提示: 令 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 分别确定 t 值.]

*14. 用本节方法求点 (x_1, y_1, z_1) 分别关于原点和点 (a, b, c) 的对称点的坐标.

[提示: 利用坐标轴的平移.]

第二节　直线与平面的关系

2·1 直线与平面的相关位置

设有直线

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S} \tag{A}$$

与平面

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}+d=0. \tag{B}$$

下面就它们的交点个数来讨论它们的相关位置. 求交点就是求同时适合(A)和(B)的位置向量. 因此应当把 $\boldsymbol{P}$ 作为未知向量来解向量方程. 如果能够求出和 $\boldsymbol{P}$ 相对应的参数 t 的值就可决定未知向量了. 为此将(A)中的 $\boldsymbol{P}$ 代入(B), 得

$$\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S})+d=0,$$

或写作

$$(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S})t+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_0+d=0. \tag{C}$$

现就方程(C)的系数, 按各种情况讨论如下:

1. 如果 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S}\neq0$, 则适合(C)的 t 有一个确定的值

$$t=-\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_0+d}{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S}}. \tag{D}$$

在这种情况下, 直线和平面相交于一点. 将(D)代入(A), 即得交点的位置向量为 $\boldsymbol{P}_0-\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_0+d}{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S}}\boldsymbol{S}$.

2. 如果 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S}=0$, 但 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_0+d\neq0$, 则适合(C)的 t 不存在, 在这种情况下, 直线和平面无交点, 因此直线和平面平行, 而且直线在平面的外部.

3. 如果 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S}=0$, 且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_0+d=0$, 则适合(C)的 t 值有无数个, 在这种情况下, 直线和平面有无数个交点, 因此直线落在平面内.

以上三种情况, 反过来也成立. 从而有

定理 1 直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{S}t$ 与平面 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}+d=0$ 的相关位置有三种: (1) 相交的充要条件是 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S}\neq0$, 且交点的位置向量是 $\boldsymbol{P}_0-\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_0+d}{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S}}\boldsymbol{S}$; (2)平行的充要条件是 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S}=0$, $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_0+d\neq0$; (3)直线落在平面内的充要条件是

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S}=0,\quad \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_0+d=0.$$

化成坐标形式，则有

定理2 直线 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 与平面

$$ax+by+cz+d=0$$

的相关位置有三种：

(1) 相交的充要条件是

$$al+bm+cn\neq 0,$$

且交点是

$$\left(x_0-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{al+bm+cn}l,\ y_0-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{al+bm+cn}m,\right.$$

$$\left.z_0-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{al+bm+cn}n\right);$$

(2) 平行的充要条件是

$$al+bm+cn=0,\ ax_0+by_0+cz_0+d\neq 0;$$

(3) 直线落在平面内的充要条件是

$$al+bm+cn=0,\ ax_0+by_0+cz_0+d=0.$$

【例1】 讨论直线

$$x=\alpha z+p,\quad y=\beta z+q \tag{A}$$

和平面

$$ax+by+cz+d=0 \tag{B}$$

的相关位置.

解：将(A)代入(B)，整理后，得

$$(a\alpha+b\beta+c)z+ap+bq+d=0.$$

(1) 如果 $a\alpha+b\beta+c\neq 0$，则(A)与(B)相交，且交点是

$$\left(-\alpha\left(\frac{ap+bq+d}{a\alpha+b\beta+c}\right)+p,\ -\beta\left(\frac{ap+bq+d}{a\alpha+b\beta+c}\right)+q,\right.$$

$$\left.-\frac{ap+bq+d}{a\alpha+b\beta+c}\right).$$

(2) 如果 $a\alpha+b\beta+c=0$, $ap+bq+d\neq0$, 则(A)与(B)平行.

(3) 如果 $a\alpha+b\beta+c=0$, $ap+bq+d=0$, 则(A)落在(B)内.

*【例 2】 求直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{C}$ 和平面 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_*+u\boldsymbol{A}+v\boldsymbol{B}$ 相交的充要条件，且求交点的位置向量。

解：将直线方程中的 $\boldsymbol{P}$ 代入平面方程，得

$$\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_*+u\boldsymbol{A}+v\boldsymbol{B}.$$

如果 $\boldsymbol{A}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{B}=\{b_1, b_2, b_3\}$, $\boldsymbol{C}=\{c_1, c_2, c_3\}$, $\boldsymbol{P}_0=\{x_0, y_0, z_0\}$, $\boldsymbol{P}_*=\{x_*, y_*, z_*\}$，上式就化成坐标形式：

$$\begin{cases} a_1u+b_1v-c_1t=x_0-x_*, \\ a_2u+b_2v-c_2t=y_0-y_*, \\ a_3u+b_3v-c_3t=z_0-z_*. \end{cases}$$

这是以 u, v, t 为未知数的三元一次方程组，当系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{vmatrix}\neq0,$$ 即 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})\neq0$ 时，方程组有唯一解。

于是所求的充要条件是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})\neq0$. 下面来求方程组的解

$$u=\frac{\begin{vmatrix} x_0-x_* & b_1 & -c_1 \\ y_0-y_* & b_2 & -c_2 \\ z_0-z_* & b_3 & -c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{vmatrix}}=\frac{(\boldsymbol{P}_0-\boldsymbol{P}_*, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})}{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})}.$$

同理可求

$$v=\frac{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}_0-\boldsymbol{P}_*, \boldsymbol{C})}{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})}, \quad t=\frac{-(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}_0-\boldsymbol{P}_*)}{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})}.$$

将 t 的值代入 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{C}$, 即得交点的位置向量为

$$\boldsymbol{P}_0-\frac{(\boldsymbol{P}_0-\boldsymbol{P}_*,\ \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})}{(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})}\boldsymbol{C}.$$

2·2 直线与平面的交角

当直线与平面相交时，我们来讨论它们的一个度量关系——交角.

定义 直线与平面的交角，是指直线与它在这平面上的射影所夹的锐角.

设直线 l: $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 和平面 π: $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}+d=0$ 交于 A(见图 4-7(a)和(b)). 又 l 在 π 上的射影是 m, 于是 l 和 m 的交角 θ, 就是 l 与 π 的交角. 又 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的交角是 ϕ, 则 ϕ 与 θ 的关系有两种可能, 即

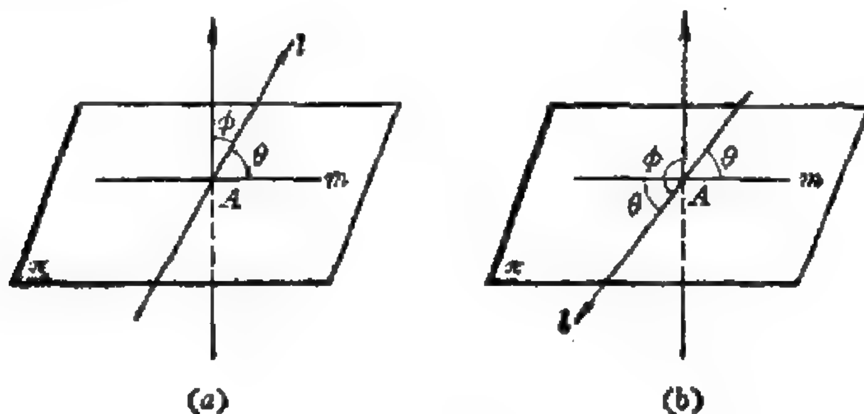


图 4-7

$$\phi\pm\theta=\frac{\pi}{2}\quad 或\quad \pm\theta=\frac{\pi}{2}-\phi.$$

于是 $\sin(\pm\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)$, 即 $\sin\theta=\pm\cos\phi$, 但 θ 为锐角, 故有 $\sin\theta=|\cos\phi|$ 或 $\sin\theta=|\cos\phi|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{m}|\,|\boldsymbol{S}|}$. 如果 $\boldsymbol{S}=\{l,\ m,\ n\}$, $\boldsymbol{m}=\{a,\ b,\ c\}$, 则上式化成

$$\sin\theta=\frac{|al+bm+cn|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

归纳起来，就有

定理 3 设直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{S}t$ 与平面 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}+d=0$ 的交角是 θ，则

$$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{S}|},\tag{1}$$

化成坐标形式，则有

定理 4 设直线 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 与平面 $ax+by+cz+d=0$ 的交角是 θ，则

$$\sin\theta=\frac{|al+bm+cn|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.\tag{2}$$

【例 3】 先证直线 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 和平面 $x+y+z=1\,(a+b+c\neq0)$ 相交，再求它们的交点和交角.

解：将直线方程化成参数式：

$$x=at,\ y=bt,\ z=ct.$$

代入平面方程中，得 $(a+b+c)t=1$，由于 $a+b+c\neq0$，故得 $t=(a+b+c)^{-1}$，因此直线与平面相交，且交点是

$$(a(a+b+c)^{-1},\ b(a+b+c)^{-1},\ c(a+b+c)^{-1}).$$

又由公式(2)，得

$$\sin\theta=\frac{|a+b+c|}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}.$$

故所求交角是

$$\arcsin\frac{|a+b+c|}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}.$$

习 题 4·2

1. 先证直线 $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$ 与平面 $x+y+z=2$ 相交，再求 $P_1(3, 4, 5)$ 到交点的距离.

2. 如果直线 $\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}$ 和平面 $ax+by+cz+d=0$ 相交. 求交点与 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的距离，但 $ax_0+by_0+cz_0+d\neq0$.

3. 过点 $P_*(x_*, y_*, z_*)$ 作与定直线 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 平行的直线，它与平面 $ax+by+cz+d=0$ 的交点是 Q，求 P_*Q 的距离，但 $al+bm+cn\neq0$.

4. 求直线 $\begin{cases} x=\alpha z+p \\ y=\beta z+q \end{cases}$ 在平面 $ax+by+cz+d=0$ 内的充要条件.

5. 求直线 $\begin{cases} x+2y-z-6=0 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases}$ 和平面 $x+y+z=9$ 的交点及交角.

6. 设有平面 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}-d^2=0$ 及平面外两定点 P_1 与 P_2，如果直线 P_1P_2 与已知平面相交，求其交点.

7. 一点 P 以等速 $\boldsymbol{v}$ 作直线运动，开始运动时，此点的位置为 P_0，问何时此点能与平面 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}+d=0$ 相交？这里 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v}\neq0$.

8. 求平面 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}+d=0$ 与三坐标面及三坐标轴的交角.

9. 求直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 与三坐标面及三坐标轴的交角.

10. 如果以两直线 $\frac{x-x_0}{\cos\alpha_i}=\frac{y-y_0}{\cos\beta_i}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma_i}(i=1, 2)$ 与平面 $ax+by+cz+d=0$ 的两交点为底，以 (x_0, y_0, z_0) 为顶，作成一等腰三角形，则
$$a(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)+b(\cos\beta_1-\cos\beta_2)+c(\cos\gamma_1-\cos\gamma_2)=0.$$
[提示：利用等腰三角形证明交角相等.]

*11. 设 P 为不在坐标面上的一点，且 PM，PN 是由 P 到 zx，xy 面的两条垂线，其中 M，N 是垂足. 又设 OP 与平面 OMN 及三个坐标面的交角是 θ，α，β，γ. 求证
$$\csc^2\theta=\csc^2\alpha+\csc^2\beta+\csc^2\gamma.$$

*12. 在例 2 中，将 u，v 代入平面方程中，推求交点的位置向量.

第三节　空间两直线的关系

3·1　两直线的相关位置

在立体几何里，空间两直线的相关位置有下面几种情况：

位置关系
- 共面
  - 相交直线
  - 平行直线
  - 重合直线
- 不共面——异面直线（偏斜直线）

下面利用向量来研究两直线的位置关系．设

$$l_1:\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_1 \quad 及 \quad l_2:\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_2$$

并作向量 $\overrightarrow{P_2P_1}$. 如果 $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ 不共面，则 l_1, l_2 是异面直线．如果 $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ 共面，则 l_1 与 l_2 也必共面．同时在后一种情况下，如果 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$ 不共线，则 l_1 和 l_2 不平行，也就是在同一平面内相交．如 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$ 共线，且 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 不与它们共线，则 l_1 和 l_2 平行．当 $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, 及 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 共线时，则 l_1 与 l_2 重合．以上情况，反过来也都成立．于是有

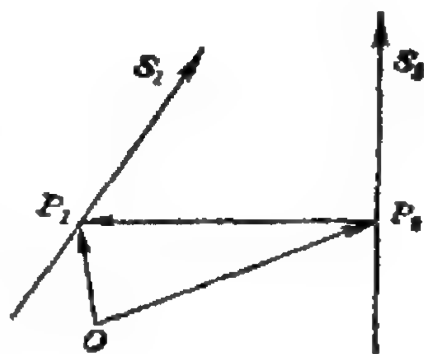


图 4-8

定理 1　两直线

$$l_1:\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_1 \tag{1}$$

及

$$l_2:\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_2 \tag{2}$$

异面的充要条件是

$$(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2)\neq 0. \tag{3}$$

定理 2　两直线 l_1 及 l_2 共面的充要条件是：

$$(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2)=0. \tag{4}$$

定理 3 两直线 l_1 及 l_2 相交的充要条件是：

$$(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2)=0,\ \boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2\neq 0. \tag{5}$$

定理 4 两直线 l_1 及 l_2 平行的充要条件是：

$$\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=0,\ (\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\times\boldsymbol{S}_1\neq 0. \tag{6}$$

定理 5 两直线 l_1 及 l_2 重合的充要条件是：

$$\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=0,\ (\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\times\boldsymbol{S}_1=0. \tag{7}$$

为了某些应用上的方便，仿照第二章第五节关于两平面的位置关系的讨论，先将方程(1)及(2)化成坐标形式，然后利用矩阵的秩来讨论方程解的个数.

设 $\boldsymbol{P}_1=\{x_1,\ y_1,\ z_1\},\ \boldsymbol{P}_2=\{x_2,\ y_2,\ z_2\},$

$$\boldsymbol{S}_1=\{l_1,\ m_1,\ n_1\}\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{S}_2=\{l_2,\ m_2,\ n_2\}\neq\boldsymbol{0},$$

则 $\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2=\{x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2\}$，且设两矩阵

$$C=\begin{bmatrix} l_1, & l_2 \\ m_1, & m_2 \\ n_1, & n_2 \end{bmatrix} \quad 及 \quad A=\begin{bmatrix} l_1, & l_2, & x_1-x_2 \\ m_1, & m_2, & y_1-y_2 \\ n_1, & n_2, & z_1-z_2 \end{bmatrix}$$

的秩分别是 R_C 及 R_A. 于是

$$(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2)=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix},$$

$$(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\times\boldsymbol{S}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}.$$

故得 $\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}=0$. 即 R_C 为 1. $\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2\neq\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $R_C=2$, 这是因为 C 中三个二阶行列式至少有一个不是零. 又

$$(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2)=0,\ \ \boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2\neq\boldsymbol{0}$$

的充要条件是 $R_A=2$, $R_C=2$. 这是因为 $R_A=1$时，必有 $R_C=1$, 这不可能. $\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\times\boldsymbol{S}_1\neq\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $R_C=1$, $R_A=2$. 且 $\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\times\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $R_C=1$, $R_A=1$.

从而有

定理6 两直线

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}=t_1 \tag{8}$$

和

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}=t_2 \tag{9}$$

不共面的充要条件是 $R_A=3$.

定理7 两直线(8)及(9)共面的充要条件是 $R_A=2$.

定理8 两直线(8)及(9)相交的充要条件是 $R_C=R_A=2$.

定理9 两直线 (8) 及 (9) 平行的充要条件是 $R_C=1$, $R_A=2$.

定理10 两直线(8)及(9)重合的充要条件是 $R_A=1$.

注意 若从代数角度就方程(8)及(9)的系数来研究它们的相关位置,这就转到讨论它们公共点的个数问题. 由(8)及(9)可知,讨论公共点的个数即讨论方程组

$$x_1+l_1t_1=x_2+l_2t_2,\ \ y_1+m_1t_1=y_2+m_2t_2,$$
$$z_1+n_1t_1=z_2+n_2t_2$$

或

$$
\begin{cases}
l_1t_1-l_2t_2+x_1-x_2=0, \\
m_1t_1-m_2t_2+y_1-y_2=0, \\
n_1t_1+n_2t_2+z_1-z_2=0
\end{cases}
\tag{10}
$$

中 t_1 及 t_2 的解的个数问题.

1．当 $R_C=R_A=2$ 时，则(10)有唯一的解，即仅有一个公共点，故两直线相交，反过来也成立，此即定理 8.

2．当 $R_A=1$，这时 $R_C=1$，则(10)具有含一个参数的无穷多解，故两直线重合，反过来也成立，此即定理 10.

3．当 $R_A=3$，这时 $R_C=2$(否则 $R_C=1$，于是矩阵 C 中所有二阶行列式都是零，而 A 的行列式依第三纵列展开也必是零，故 A 的秩不能是 3，此时(10)无解)．由于 $R_C=2$，C 中三个二阶行列式至少有一个不是零，故两直线不共面，反过来也成立，此即定理 6.

4．当 $R_A=2$ 且 $R_C=1$，此时(10)无解，且 C 中所有二阶行列式都是零，从而知两直线平行，反过来也成立，此即定理 9.

【例 1】 判定两直线

$$\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{3}$$

和

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-8}{9}$$

的相关位置.

解：$C=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ 3 & 9 & -6 \end{bmatrix}$

由于 C 及 A 中的二阶行列式都是零，故 $R_C=R_A=1$，这两直线必相重合.

当两条直线(1)及(2)相交时，我们推求所定平面的方程。在所求平面上取与 P_1 及 P_2 不同的任意点 P，于是 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$ 必共面，即

$$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2)=0. \tag{11}$$

此即所求平面的方程. 化成坐标式，即得

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \tag{12}$$

此即(8)和(9)二直线相交时所在平面的方程. 于是有

定理 11 两直线(1)和(2)如相交，则所定的平面方程是(11)；两直线(8)和(9)如相交，则所定的平面方程是(12).

当两直线(1)及(2)平行时，我们推求所定平面的方程. 在所求平面上取与 P_1 及 P_2 不同的任意点 P，于是 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_1$ 必共面，即

$$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{S}_1)=0. \tag{13}$$

此即所求平面的方程. 化成坐标式，即得

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0. \tag{14}$$

此即(8)和(9)二直线平行时所在平面的方程. 于是有

定理 12 两直线(1)和(2)如平行，则所定的平面方程是(13)；两直线(8)和(9)如平行，则所定的平面方程是(14).

【例 2】 先证两直线

$$\frac{x-4}{-2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{-3}$$

和

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{3}$$

相交，再求交点、交角及所定平面的方程．

【证及解】

$$C=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & -4\\ -3 & 3\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 4\\ 2 & -4 & -4\\ -3 & 3 & 6\end{bmatrix}.$$

在 A 的行列式中第一列和第三列成比例，故其值是零．又 C 的三个二阶行列式都不是零，故 $R_C=R_A=2$，因此两直线相交．

为了求交点，先将已知两条直线化成参数式

$$x=4-2t_1,\quad y=-3+2t_1,\quad z=5-3t_1;$$

$$x=t_2,\qquad y=1-4t_2,\qquad z=-1+3t_2$$

（在交点处每条直线所对应的参数值一般是不同的）．故有

$$4-2t_1=t_2,\quad -3+2t_1=1-4t_2,\quad 5-3t_1=-1+3t_2.$$

由于两直线相交，这三个二元一次方程必有公解，解之，得 $t_1=2$，$t_2=0$，故得交点 $(0,\ 1,\ -1)$．

设交角是 θ，则有

$$\cos\theta=\frac{(-2)\times1+2\times(-4)+(-3)\times3}{\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(-3)^2}\sqrt{(1)^2+(-4)^2+(3)^2}}$$

$$=\frac{-19}{442}\sqrt{442}.$$

于是两直线所交的锐角是 $\arccos\frac{19}{442}\sqrt{442}$.

由(12)可得：两直线所定的平面方程是

$$\begin{vmatrix}x-4 & y+3 & z-5\\ -2 & 2 & -3\\ 1 & -4 & 3\end{vmatrix}=0.$$

展开得 $$2x-y-2z-1=0.$$

*【例 3】 已知两直线

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta}=\frac{y-a}{\alpha}=\frac{z-a-d}{\alpha+\delta}$$

和
$$\frac{x-b+c}{\beta-\gamma}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-b-c}{\beta+\gamma}. \quad (a\neq b,\ c\neq d)$$

(1) 求证它们共面;

(2) 求它们相交的充要条件. 当相交时,求所定平面的方程;

(3) 求它们平行的充要条件. 当平行时,求所定平面的方程;

(4) 求它们重合的充要条件.

【证及解】
$$\boldsymbol{P}_1=\{a-d,\ a,\ a+d\},$$
$$\boldsymbol{P}_2=\{b-c,\ b,\ b+c\},$$
$$\boldsymbol{S}_1=\{\alpha-\delta,\ \alpha,\ \alpha+\delta\},$$
$$\boldsymbol{S}_2=\{\beta-\gamma,\ \beta,\ \beta+\gamma\}.$$

(1) $$(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2)=\begin{vmatrix} a-d-b+c & a-b & a+d-b-c \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix},$$

在此行列式中将第一列、第三列分别减去第二列,得

$$\begin{vmatrix} -d+c & a-b & d-c \\ -\delta & \alpha & \delta \\ -\gamma & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

显然此行列式的值为零,故已知两直线共面.

(2) $$\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}=(\alpha\gamma-\beta\delta)(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

由(5)得:相交的充要条件是 $\alpha\gamma-\beta\delta\neq 0$,并由(12)得:所定的平面方程是

$$\begin{vmatrix} x-a+d & y-a & z-a-d \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}=0,$$

展开得
$$(\alpha\gamma-\beta\delta)(x-2y+z)=0.$$

即
$$x-2y+z=0.$$

(3) $(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\times\boldsymbol{S}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a-d-b+c & a-b & a+d-b-c \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \end{vmatrix}$

$$=[\delta(a-b)-\alpha(d-c)](\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

由(6)得平行的充要条件是$\delta(a-b)-\alpha(d-c)\neq0$，且由(14)得所定的平面方程是

$$\begin{vmatrix} x-a+d & y-a & z-a-d \\ a-d-b+c & a-b & a+d-b-c \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \end{vmatrix}=0,$$

展开得 $$[\delta(a-b)-\alpha(d-c)](x-2y+z)=0,$$

即 $$x-2y+z=0.$$

(4) 由公式(7)得重合的充要条件是

$$\alpha\gamma-\beta\delta=0,\quad \delta(a-b)-\alpha(d-c)=0.$$

3·2 点到直线的距离和两平行直线的距离

已知直线 l: $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 及 l 外一点 A. 现在求 A 到 l 的距离 AT(见图 4-9). 以 $\overrightarrow{P_0A}$ 和 $\overrightarrow{P_0U}=\boldsymbol{S}$ 为邻边的平行四边形的面积是 $|\overrightarrow{P_0A}\times\overrightarrow{P_0U}|$, 另一方面，这个平行四边形的面积也可写作 $|\boldsymbol{S}|\times|AT|$, 故得

$$|\overrightarrow{P_0A}\times\overrightarrow{P_0U}|=|\boldsymbol{S}|\times|AT|,$$

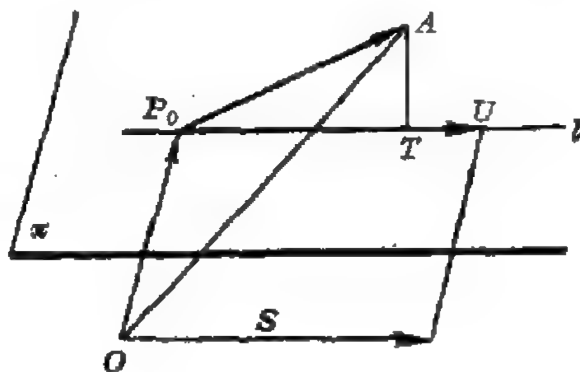


图 4-9

所以 $$|AT|=\frac{|\overrightarrow{P_0A}\times\overrightarrow{P_0U}|}{|\boldsymbol{S}|}.$$

即 A 到 l 的距离

$$d=\frac{|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_0)\times\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{S}|}. \tag{15}$$

设 $\boldsymbol{P}_0=\{x_0, y_0, z_0\}$, $\boldsymbol{A}=\{a, b, c\}$, $\boldsymbol{S}=\{l, m, n\}$, 则

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_0)\times\boldsymbol{S}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a-x_0 & b-y_0 & c-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}.$$

于是得到

$$d=\frac{\sqrt{\begin{array}{c}[n(b-y_0)-m(c-z_0)]^2+[l(c-z_0)-n(a-x_0)]^2\\+[m(a-x_0)-l(b-y_0)]^2\end{array}}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{16}$$

从而有

定理 12 从点 A 到直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 的距离是(15).

定理 13 由点 $A(a,b,c)$ 到直线 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 的距离是(16).

利用点到直线的距离就可以推出两平行直线的距离. 已知两平行直线

$$l_1:\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}\quad 和\quad l_2:\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}.$$

求 l_1 和 l_2 间的距离就是求 P_1 到 l_2 的距离. 利用公式 (15), 得 l_1 和 l_2 间的距离是

$$\frac{|(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\times\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{S}|}. \tag{17}$$

设 $\boldsymbol{P}_1=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\boldsymbol{P}_2=\{x_2, y_2, z_2\}$, $\boldsymbol{S}=\{l, m, n\}$, 则

$$(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\times\boldsymbol{S}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l & m & n \end{vmatrix}.$$

于是由(16), 得到距离

$$=\frac{\sqrt{\begin{array}{c}[n(y_1-y_2)-m(z_1-z_2)]^2+[l(z_1-z_2)-n(x_1-x_2)]^2\\+[m(x_1-x_2)-l(y_1-y_2)]^2\end{array}}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{18}$$

故有

定理 14 两平行直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}$ 的距离是(17).

定理 15 两平行直线 $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 和 $\frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}$ 的距离是(18).

【例 4】 已知三角形的三顶点是 $A_1(a_1, b_1, c_1)$, $A_2(a_2, b_2, c_2)$, $A_3(a_3, b_3, c_3)$. 求三边上高线的长.

解: A_2A_3 的方程是 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}_2+t(\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_3)$, 于是

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)\times(\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_3)\\&\quad=\boldsymbol{A}_2\times\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_3\times\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2,\end{aligned}$$

代入公式(15), 即得 A_1 到 A_2A_3 上的高线的长是

$$\frac{|\boldsymbol{A}_2\times\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_3\times\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_3|}.$$

化成坐标式, 即得

$$\frac{|(A_1+B_1+C_1)\boldsymbol{i}+(A_2+B_2+C_2)\boldsymbol{j}+(A_3+B_3+C_3)\boldsymbol{k}|}{|(a_2-a_3)\boldsymbol{i}+(b_2-b_3)\boldsymbol{j}+(c_2-c_3)\boldsymbol{k}|}$$

$$=\frac{\sqrt{(A_1+B_1+C_1)^2+(A_2+B_2+C_2)^2+(A_3+B_3+C_3)^2}}{\sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2+(c_2-c_3)^2}}.$$

这里 A_i, B_i, C_i 是 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ 中 a_i, b_i, c_i 的代数余子式. 同理可求 A_2 到 A_3A_1 以及 A_3 到 A_1A_2 上高线的长.

3·3 两异面直线的公垂线

已知两异面直线

$$l_1: \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_1, \quad l_2: \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_2.$$

首先证明和它们垂直且相交的直线仅有一条．也就是说它们的公垂线是唯一存在的（见图 4-10(*a*)）．

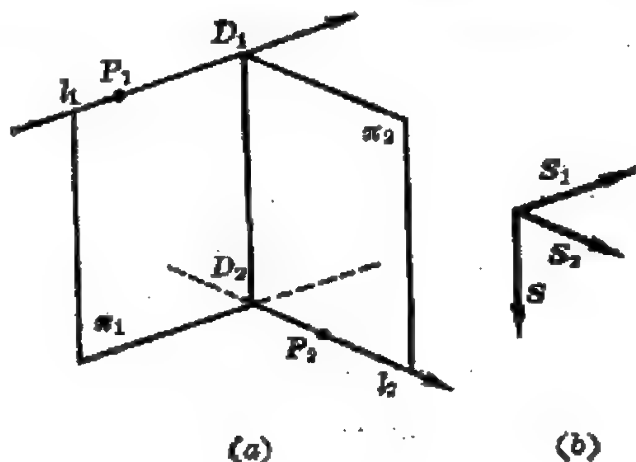


图 4-10

先作向量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2$（图 4-10(*b*)）．过 l_1 和 l_2 分别作平面 π_1 和 π_2，使它们都与 $\boldsymbol{S}$ 平行，则 π_1 和 π_2 的交线平行于 $\boldsymbol{S}$．但这条交线分别与 l_1 及 l_2 共面，所以它与 l_1 及 l_2 垂直，且分别相交于 D_1 及 D_2，于是直线 D_1D_2 就是 l_1 及 l_2 的公垂线，且 $|D_1D_2|$ 就规定为两异面直线 l_1 及 l_2 间的距离．下面我们来推求 l_1、l_2 的公垂线的方程．设公垂线方程为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}+t\boldsymbol{S}.$$

利用两直线的共面条件(4)，得

$$(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S})=0, \quad (\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{S}_2,\ \boldsymbol{S})=0.$$

这就是说：公垂线上任一点 Q 的位置向量要同时适合

$$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S})=0, \quad (\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{S}_2,\ \boldsymbol{S})=0. \tag{19}$$

于是(19)就是 l_1 及 l_2 的公垂线的向量形式的普遍方程．

设 $\boldsymbol{P}_1=\{x_1, y_1, z_1\}$，$\boldsymbol{P}_2=\{x_2, y_2, z_2\}$，$\boldsymbol{S}_1=\{l_1, m_1, n_1\}$，$\boldsymbol{S}_2=\{l_2, m_2, n_2\}$，$\boldsymbol{S}=\{l, m, n\}$，则

$$l=m_1n_2-m_2n_1, \quad m=n_1l_2-n_2l_1, \quad n=l_1m_2-l_2m_1.$$

于是(19)化为

$$
\begin{cases}
\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \\
\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.
\end{cases} \tag{20}
$$

故有

定理 16 两异面直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_2$ 的公垂线方程是(19).

定理 17 两异面直线 $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ 和 $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ 的公垂线方程是(20).

下面再推求两异面直线间的距离. 在图 4-10 中, $|D_1D_2|=\overrightarrow{P_1P_2}$ 在 $\boldsymbol{S}$ 上的射影的数值 $=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\frac{\boldsymbol{S}}{|\boldsymbol{S}|}\right|$, 于是得

$$
|D_1D_2|=\frac{|(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)\cdot\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{S}|}. \tag{21}
$$

化成坐标形式, 即

$$
|D_1D_2|=\frac{|l(x_2-x_1)+m(y_2-y_1)+n(z_2-z_1)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{22}
$$

故有

定理 18 两异面直线

$$
\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_1 \quad 和 \quad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_2
$$

的距离是(21).

定理 19 两异面直线

$$
\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad 和 \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}
$$

的距离是(22).

*【例 5】 已知两异面直线

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_1 \quad \text{和} \quad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_2.$$

求公垂线上两垂足的位置向量.

解：在图 4-10(a)中，设 $\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{P}_1+t_1\boldsymbol{S}_1$，$\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{P}_2+t_2\boldsymbol{S}_2$. 现在来确定 t_1 和 t_2 的数值. 由于

$$\overrightarrow{D_2D_1}=\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2=(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)+t_1\boldsymbol{S}_1-t_2\boldsymbol{S}_2,$$

又
$$\overrightarrow{D_2D_1}\cdot\boldsymbol{S}_1=0, \quad \overrightarrow{D_2D_1}\cdot\boldsymbol{S}_2=0.$$

故有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\cdot\boldsymbol{S}_1+t_1\boldsymbol{S}_1^2-t_2\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2=0,\\(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\cdot\boldsymbol{S}_2+t_1\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2-t_2\boldsymbol{S}_2^2=0.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}t_1\boldsymbol{S}_1^2-t_2\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2=\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\boldsymbol{S}_1,\\t_1\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2-t_2\boldsymbol{S}_2^2=\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\boldsymbol{S}_2.\end{cases}$$

将这两个方程看作是以 t_1 及 t_2 为未知数的二元一次方程. 由第二章第九节例 3，可知：

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{S}_1^2 & \boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2\\ \boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{S}_2^2\end{vmatrix}=\boldsymbol{S}_1^2\cdot\boldsymbol{S}_2^2-(\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2)^2=(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)^2.$$

再根据第二章第十一节公式(1)，得

$$\begin{cases}t_1=\dfrac{1}{(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)^2}\begin{vmatrix}\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2\\ \overrightarrow{P_1P_2}\cdot\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{S}_2^2\end{vmatrix}\\ \quad=\dfrac{1}{(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)^2}[(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)\cdot(\overrightarrow{P_1P_2}\times\boldsymbol{S}_2)],\\ t_2=\dfrac{-1}{(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)^2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{S}_1^2 & \overrightarrow{P_1P_2}\cdot\boldsymbol{S}_1\\ \boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2 & \overrightarrow{P_1P_2}\cdot\boldsymbol{S}_2\end{vmatrix}\\ \quad=\dfrac{1}{(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)^2}[(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)\cdot(\overrightarrow{P_1P_2}\times\boldsymbol{S}_1)].\end{cases}$$

于是 D_1 及 D_2 即可确定.

【例 6】 在一个长方体中，求一条对角线和不共面的对棱的距离.

解：利用图 1-8 中的坐标长方体 $OANB$—$CMPL$. OP 的方程是 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$; CM 的方程是 $y=0$, $z=c$ 或 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=$

$\frac{z-c}{0}$; BN 方程是 $z=0$, $y=b$ 或 $\frac{x}{1}=\frac{y-b}{0}=\frac{z}{0}$. 先求对角线 OP 和对棱 CM 间的距离，这时 $l=0$, $m=c$, $n=-b$, 于是由公式(22)，得 OP 及 CM 间的距离是 $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$. 同理，$OP$ 及 BN 间的距离也是 $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$. 同样可推出：对角线 OP 与对棱 AN 或对棱 CL 间的距离都是 $\frac{ca}{\sqrt{c^2+a^2}}$; 对角线 OP 与对棱 BL 或对棱 AM 间的距离都是 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

下面研究如何选取一个适当的坐标系，使两异面直线的方程能够写成简单的形式. 这对很多问题是有用的.

设有两异面直线 AB 及 $A'B'$, 它们的公垂线分别交 AB 及 $A'B'$ 于 C 及 C'. 设 $C'C$ 的中点是 O, 且设 $C'C=2c$ $(c>0)$.

1. 当 AB 与 $A'B'$ 垂直时，过 O 作 y 轴和 x 轴分别平行于 AB 和 $A'B'$(见图4-11)，于是 AB 及 $A'B'$ 的方程就分别为

$$z=c,\quad x=0 \tag{23}$$

和

$$z=-c,\ y=0. \tag{24}$$

2. 当 AB 与 $A'B'$ 不垂直时，过 O 作直线 l 及 m 分别平

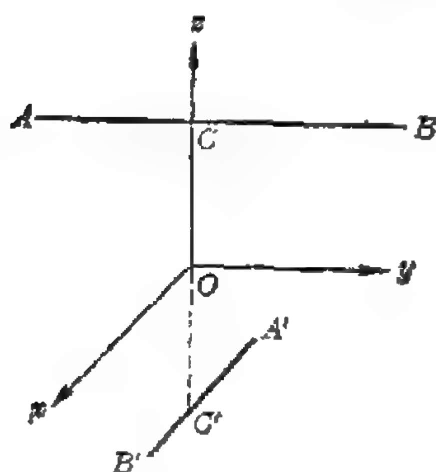


图 4-11

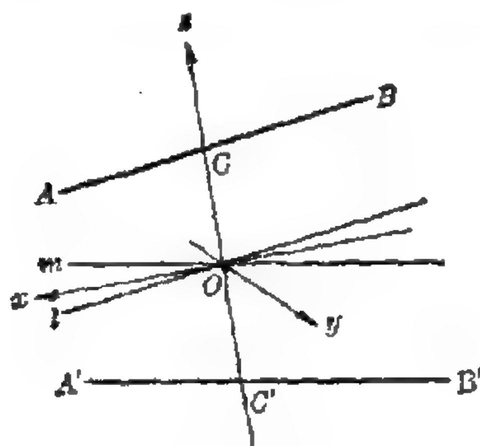


图 4-12

行于 AB 及 $A'B'$（见图 4-12）．于是 $C'C$ 将垂直于 l 及 m 所定的平面．以 l，m 的内、外平分角线为 x 轴及 y 轴，$C'C$ 为 z 轴而建立空间直角坐标系．设 AB 及 $A'B'$ 的夹角是 2θ $\left(2\theta\neq\frac{\pi}{2}\text{ 与 }\pi\right)$，于是 l、Oz 及 m、Oz 所定的平面方程分别是 $y=x\operatorname{tg}\theta$ 及 $y=-x\operatorname{tg}\theta$．又过 C 及 C' 与 xy面平行的平面方程分别是 $z=c$ 及 $z=-c$．故 AB 及 $A'B'$ 的方程分别为

$$y=x\cdot\operatorname{tg}\theta,\quad z=c\left(\theta\neq\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right) \tag{25}$$

及

$$y=-x\cdot\operatorname{tg}\theta,\quad z=-c\left(\theta\neq\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right). \tag{26}$$

【例 7】 求证与两条异面直线都相交的直线必不平行．

【证】 1．设两条异面直线垂直，则它们的方程可以写作

$$AB:\ z=c,\ x=0 \quad \text{及} \quad A'B':\ z=-c,\ y=0.$$

在 AB 上取两点 $P_i(0,\ \lambda_i,\ c)\ (i=1,\ 2)$；在 $A'B'$ 上取两点 $Q_i(\mu_i,\ 0,\ -c)\ (i=1,\ 2)$，于是 P_iQ_i 的方向数是 $-\mu_i$，λ_i，$2c$．如果 P_1Q_1 与 P_2Q_2 平行，则 $\frac{-\mu_1}{-\mu_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{2c}{2c}$，即 $\lambda_1=\lambda_2$，$\mu_1=\mu_2$．这不可能．故 P_1Q_1 与 P_2Q_2 必不平行．

2．设两条异面直线不垂直，则它们的方程可以写作

$$AB:\ y=mx,\ z=c \quad \text{及} \quad A'B':\ y=-mx,\ z=-c.$$

在 AB 上取两点 $P_i(\lambda_i,\ m\lambda_i,\ c)\ (i=1,\ 2)$；在 $A'B'$ 上取两点 $Q_i(\mu_i,\ -m\mu_i,\ -c)\ (i=1,\ 2)$，于是 P_iQ_i 的方向数是 $\lambda_i-\mu_i$，$m(\lambda_i+\mu_i)$，$2c$．如果 P_1Q_1 与 P_2Q_2 平行，则

$$\frac{\lambda_1-\mu_1}{\lambda_2-\mu_2}=\frac{m(\lambda_1+\mu_1)}{m(\lambda_2+\mu_2)}=\frac{2c}{2c},$$

即
$$\lambda_1-\mu_1=\lambda_2-\mu_2,\quad \lambda_1+\mu_1=\lambda_2+\mu_2,$$

故 $\lambda_1=\lambda_2$，$\mu_1=\mu_2$ 这也不可能．因此 P_1Q_1 与 P_2Q_2 不平行．】

习 题 4·3

1. 判定下列两直线的相关位置

(1) $x=-4+t,\ y=3-2t,\ z=2+3t,$

$x=-3+2t,\ y=1-4t,\ z=5+6t;$

(2) $\frac{x+11}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-4}{0},$

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+8}{6}.$

2. 定 k,使两直线

$$x=\alpha_1+lt,\ y=\beta_1+mt,\ z=\gamma_1+nt;$$
$$x=\alpha_2+lt,\ y=\beta_2+kt,\ z=\gamma_2+nt$$

平行,且求所定的平面方程。

3. 定 k,使两直线

$$\frac{x-1}{k}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-3}{-3} \quad 和 \quad \frac{x+3}{3}=\frac{y-9}{-4}=\frac{z+14}{7}$$

相交,且求交点和所定的平面方程。

4. 求两直线

$$x=\alpha_1z+p_1,\ y=\beta_1z+q_1 \quad 和 \quad x=\alpha_2z+p_2,\ y=\beta_2z+q_2$$

共面的充要条件。

5. 先证两直线

$$\frac{x-a_1}{a_2}=\frac{y-b_1}{b_2}=\frac{z-c_1}{c_2} \quad 和 \quad \frac{x-a_2}{a_1}=\frac{y-b_2}{b_1}=\frac{z-c_2}{c_1}$$

相交,再求它们的交点及所定平面的方程。

6. 设两直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_1$ 及 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_2$ 共面. 求证两直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_2$ 也共面。

7. 求从原点到直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}^0$ 的距离和垂足的位置向量。

8. 求两直线 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 和 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 相交的充要条件。

9. 求证两直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{4}$, $x+2y+3z-14=0,\ 3x+4y+5z-26=0$ 相交,且求交点的坐标。

10. 先证两直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ 和 $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{5}$ 异面，再求它们的公垂线方程和距离.

11. 如果直线 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 和三坐标轴都异面，求它和三坐标轴间的距离.

12. 如果两直线 $\boldsymbol{P}=t\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 异面，求公垂线方程和距离.

13. 求证两条异面直线 $y=az+b,\ z=\alpha x+\beta$ 和 $y=a'z+b',\ z=\alpha' x+\beta'$ 的距离是 $\frac{|(\alpha-\alpha')(b-b')-(\alpha'\beta-\alpha\beta')(a-a')|}{[\alpha^2\alpha'^2(a-a')^2+(\alpha-\alpha')^2+(a\alpha-a'\alpha')^2]^{\frac{1}{2}}}$.

*14. 求证正四面体的两对棱的距离等于以一棱为边的正方形的对角线的长.

*15. 设 ABC 和 $A'B'C'$ 是两条异面直线，BB' 是公垂线，CA' 与 $A'B'C'$ 垂直，$C'A$ 与 ABC 垂直. 求证 $|AB||BC|=|A'B'||B'C'|$.
[提示：用公式(23)，(24)及(25)，(26).]

第四节　平面和空间直线的结合问题

在第三章和本章里，讨论了平面与平面、直线与直线以及平面与直线的位置关系问题. 值得注意的是，在讨论过程中，平面的法向量及直线的方向向量起着很重要的作用. 例如平面与直线垂直的充要条件是：平面的法线向量 $\boldsymbol{N}$ 与直线的方向向量 $\boldsymbol{S}$ 平行，即 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S}=\boldsymbol{0}$；平面与直线平行的充要条件是 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{S}=0$ 等等. 但是仅用 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{S}$ 还不能完全确定平面或直线的位置，例如要推求与已知平面平行的直线方程时，除了利用 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{S}$ 的关系外，还需要其它条件才能确定所求直线的位置，从而得到它的方程.

另外，在讨论平面和直线的结合问题上，平面束起着突出的作用. 在第三章第七节曾经介绍过用直线的普遍式表示平面束的方程. 为了以后应用上的方便，在这里我们再介绍用

直线的对称式表示平面束的方程.

定理1 过直线

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \quad (lmn\neq 0) \tag{1}$$

的平面束的方程是

$$\lambda\left(\frac{x-x_0}{l}\right)+\mu\left(\frac{y-y_0}{m}\right)+\nu\left(\frac{z-z_0}{n}\right)=0. \tag{2}$$

这里 λ, μ, ν 是参数，且适合

$$\lambda+\mu+\nu=0,\ \lambda^2+\mu^2+\nu^2\neq 0. \tag{3}$$

【证】 1. 先证方程(2)对任意三实数 λ, μ, $\nu(\lambda^2+\mu^2+\nu^2\neq 0)$都表示平面. 将方程(2)写作

$$\frac{\lambda}{l}x+\frac{\mu}{m}y+\frac{\nu}{n}z-\left(\frac{\lambda}{l}x_0+\frac{\mu}{m}y_0+\frac{\nu}{n}z_0\right)=0. \tag{2'}$$

这是三元一次方程. 由于

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2\neq 0,\ lmn\neq 0,$$

故
$$\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2+\left(\frac{\mu}{m}\right)^2+\left(\frac{\nu}{n}\right)^2\neq 0.$$

即知(2)表示一个平面. 由(3)及根据本章第二节定理2可知：(2′)即(2)含有直线(1).

2. 再证明过(1)的任意平面 π 的方程都包括在方程(2)内. 取 π 中不在(1)上的一点 $A(a, b, c)$，即 $\frac{a-x_0}{l}$, $\frac{b-y_0}{m}$, $\frac{c-z_0}{n}$ 不全相等. 过(1)的平面(2)如果过 A，则有

$$\lambda\left(\frac{a-x_0}{l}\right)+\mu\left(\frac{b-y_0}{m}\right)+\nu\left(\frac{c-z_0}{n}\right)=0.$$

将这式与(3)看作是 λ, μ, ν 的三元齐次方程，解之，得

$$\lambda:\mu:\nu=\left(\frac{b-y_0}{m}-\frac{c-z_0}{n}\right):\left(\frac{c-z_0}{n}-\frac{a-x_0}{l}\right)$$

$$:\left(\frac{a-x_0}{l}-\frac{b-y_0}{m}\right).$$

这里 $\lambda^2+\mu^2+\nu^2\neq 0$，因为如果 $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=0$，即 $\lambda=\mu=\nu=0$，也就是

$$\frac{b-y_0}{m}-\frac{c-z_0}{n}=0,\quad \frac{c-z_0}{n}-\frac{a-x_0}{l}=0,$$

$$\frac{a-x_0}{l}-\frac{b-y_0}{m}=0,$$

于是
$$\frac{a-x_0}{l}=\frac{b-y_0}{m}=\frac{c-z_0}{n},$$

这是不可能的．故 π 的方程可由

$$\left(\frac{b-y_0}{m}-\frac{c-z_0}{n}\right)\left(\frac{x-x_0}{l}\right)+\left(\frac{c-z_0}{n}-\frac{a-x_0}{l}\right)\left(\frac{y-y_0}{m}\right)$$

$$+\left(\frac{a-x_0}{l}-\frac{b-y_0}{m}\right)\left(\frac{z-z_0}{n}\right)=0$$

来表示．于是过(1)的任何平面都可写成(2)的形式．】

【例 1】 求平面 $ax+by+cz+d=0$，$a^2+b^2+c^2\neq 0$ 外的一定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在此平面上的射影的坐标以及 P_0 关于此平面的对称点的坐标．再求平面 $Ax+By+Cz+D=0$，$A^2+B^2+C^2\neq 0$，$Aa+Bb+Cc\neq 0$ 关于已知平面的对称平面的方程．

解：1．设 $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 是所求的对称点，则 $ax+by+cz+d=0$ 到 P_0 和 $\bar{P}$ 的有向距离等值异号，也即

$$\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=-\left(\frac{a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z}+d}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)\ (\varepsilon=\pm 1),$$

故有

$$ax_0+by_0+cz_0+d=-(a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z}+d).\qquad (A)$$

又 $\overrightarrow{P_0\bar{P}}$ 的一组方向数是 $\bar{x}-x_0$, $\bar{y}-y_0$, $\bar{z}-z_0$; 平面 $ax+by+cz+d=0$ 的法向量的一组方向数是 a, b, c. 由于 $\overrightarrow{P_0\bar{P}}$ 和 $ax+by+cz+d=0$ 垂直，故有

$$\frac{\bar{x}-x_0}{a}=\frac{\bar{y}-y_0}{b}=\frac{\bar{z}-z_0}{c}=k,$$

即得

$$\bar{x}=x_0+ak,\ \bar{y}=y_0+bk,\ \bar{z}=z_0+ck. \qquad \text{(B)}$$

将(B)代入(A)，得

$$k=-\frac{2(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}. \qquad \text{(C)}$$

于是 $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 即可完全确定.

2. 如果 M 是 P_0 在 $ax+by+cz+d=0$ 上的射影，则 P_0 及 $\bar{P}$ 的中点就是 M. 于是 M 的坐标为 $\left(\frac{x_0+\bar{x}}{2}, \frac{y_0+\bar{y}}{2}, \frac{z_0+\bar{z}}{2}\right)$ 即 $\left(x_0+\frac{ak}{2}, y_0+\frac{bk}{2}, z_0+\frac{ck}{2}\right)$.

3. 设 $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 是 $Ax+By+Cz+D=0$ 上的任意一点，则

$$A\bar{x}+B\bar{y}+C\bar{z}+D=0, \qquad \text{(D)}$$

又 $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 的对称点是 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，显然，它们坐标之间有如(B)及(C)的关系. 将(B)代入(D)，得

$$A(x_0+ak)+B(y_0+bk)+C(z_0+ck)+D=0,$$

即

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=-(Aa+Bb+Cc)k. \qquad \text{(E)}$$

再将(C)代入(E)，略去足码，即得

$$(a^2+b^2+c^2)(Ax+By+Cz+D)$$
$$=2(Aa+Bb+Cc)(ax+by+cz+d).$$

此即所求的对称平面的方程.

【例 2】 已知两条异面直线，过每一条直线作另一直线的平行平面. 求证这两平面必互相平行，且它们的距离就是

两异面直线间的距离.

【证】 1. 当已知两直线垂直时，它们的方程可以写作

$$z-c=0,\quad x=0; \tag{A}$$

$$z+c=0,\quad y=0. \tag{B}$$

过(A)的平面束方程是

$$\lambda_1 x+\lambda_2(z-c)=0, \tag{C}$$

(B)的方向数是 1, 0, 0; (C)的法线的方向数是 λ_1, 0, λ_2. 利用(B)与(C)的平行条件得 $\lambda_1=0$, 故过(A)与(B)平行的平面是 $z-c=0$; 同理可得过(B)与(A)平行的平面是 $z+c=0$. 故知两平面互相平行，且距离是 $2c$, 恰是两异面直线的距离.

2. 当已知两直线不垂直时，证明作为习题，留给读者自行补上. 】

【另证】 在一直线上取 A、B 两点，在另一直线上取 C、D 两点. 设过直线 AB 与 $\overrightarrow{CD}$ 平行的平面是 $\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A})=0$, 又因这平面过 B, 故有 $\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=0$. 又由于这平面与 $\overrightarrow{CD}$ 平行，则有 $\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C})=0$, 故可取 $\boldsymbol{m}=\lambda[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})]$, 因此过 AB 且与 CD 平行的平面是

$$[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})]\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A})=0,$$

同理，过 CD 且与 AB 平行的平面是 $[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})]\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{C})=0$. 显然，这两个平面平行，且它们的距离是 $\dfrac{|[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})]\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})|}{|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})|}$. 另一方面，这两条直线的方向向量分别是 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}$. 根据公式(21)可知：它们的距离与上面所求得的距离完全一致. 】

【例 3】 求过两条异面直线

$$\frac{x-x_i}{l_i}=\frac{y-y_i}{m_i}=\frac{z-z_i}{n_i}\quad (i=1,\ 2)$$

外一点 $A(a, b, c)$，且与这两直线共面的直线方程.

解：过 A 及两直线分别作平面，则平面的交线即为所求. 由定理1可得知，这两个平面的方程分别是

$$\left(\frac{b-y_1}{m_1}-\frac{c-z_1}{n_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{l_1}\right)+\left(\frac{c-z_1}{n_1}-\frac{a-x_1}{l_1}\right)\left(\frac{y-y_1}{m_1}\right)$$
$$+\left(\frac{a-x_1}{l_1}-\frac{b-y_1}{m_1}\right)\left(\frac{z-z_1}{n_1}\right)=0$$

和

$$\left(\frac{b-y_2}{m_2}-\frac{c-z_2}{n_2}\right)\left(\frac{x-x_2}{l_2}\right)+\left(\frac{c-z_2}{n_2}-\frac{a-x_2}{l_2}\right)\left(\frac{y-y_2}{m_2}\right)$$
$$+\left(\frac{a-x_2}{l_2}-\frac{b-y_2}{m_2}\right)\left(\frac{z-z_2}{n_2}\right)=0.$$

另解：将已知直线写作 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_i+t\boldsymbol{S}_i(i=1, 2)$. 设 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+u\boldsymbol{S}$ 为所求，由共面条件得 $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}_i, \boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{A})=0$，即 $\boldsymbol{S}\cdot[\boldsymbol{S}_i\times(\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{A})]=0(i=1, 2)$. 故得

$$\boldsymbol{S}=\lambda[\boldsymbol{S}_1\times(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{A})]\times[\boldsymbol{S}_2\times(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{A})].$$

因此所求的直线方程是

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+\lambda u[\boldsymbol{S}_1\times(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{A})]\times[\boldsymbol{S}_2\times(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{A})]$$

或 $$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+t[\boldsymbol{S}_1\times(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{A})]\times[\boldsymbol{S}_2\times(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{A})].$$

【例4】 求从直线 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 外一点 $A(a, b, c)$ 作与此直线垂直且相交的直线方程，并求垂足的坐标.

解：过 A 及已知直线作平面 π_1，由定理1可知，它的方程是

$$\left(\frac{b-y_0}{m}-\frac{c-z_0}{n}\right)\left(\frac{x-x_0}{l}\right)+\left(\frac{c-z_0}{n}-\frac{a-x_0}{l}\right)\left(\frac{y-y_0}{m}\right)$$
$$+\left(\frac{a-x_0}{l}-\frac{b-y_0}{m}\right)\left(\frac{z-z_0}{n}\right)=0;$$

再过 A 作平面 π_2 与已知直线垂直，则 l, m, n 将是这平面法

线的方向数，于是 π_2 的方程就是

$$l(x-a)+m(y-b)+n(z-c)=0. \qquad (*)$$

从而 π_1 及 π_2 的交线方程即为所求的直线方程.

又在已知直线上，设垂足 T 为 $(x_0+lt,\ y_0+mt,\ z_0+nt)$，现在定 t 的值. 由于垂足在(*)上，于是有

$$l(x_0+lt-a)+m(y_0+mt-b)+n(z_0+nt-c)=0,$$

所以
$$t=\frac{(a-x_0)l+(b-y_0)m+(c-z_0)n}{l^2+m^2+n^2}.$$

另解：将已知直线写为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$，又设垂足 T 的位置向量是 $\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$，现定 t 的值(见图 4-9). 由于 AT 与已知直线垂直，故 $\overrightarrow{AT}\cdot\boldsymbol{S}=0$，即 $(\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}-\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{S}=0$. 解得

$$t=\frac{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_0)\cdot\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S}^2}.$$

因此得
$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{P}_0+\frac{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_0)\cdot\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}}\boldsymbol{S}.$$

现在再求垂线 AT 的方程. 由两点式得

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+u\left[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_0)-\frac{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_0)\cdot\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}}\boldsymbol{S}\right]$$

或
$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+\frac{u}{\boldsymbol{S}^2}\left[\boldsymbol{S}^2\overrightarrow{P_0A}-(\boldsymbol{S}\cdot\overrightarrow{P_0A})\boldsymbol{S}\right].$$

用向量三重积公式可得所求的垂线方程为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+t\left[\boldsymbol{S}\times(\overrightarrow{P_0A}\times\boldsymbol{S})\right].$$

注意 这个垂线的方程也可用几何方法来推求：过已知直线及定点 A 作一平面 π. 于是向量 $\overrightarrow{P_0A}\times\boldsymbol{S}$ 将与 π 垂直. 作向量 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{S}\times(\overrightarrow{P_0A}\times\boldsymbol{S})$，则 $\boldsymbol{U}$ 垂直于 $\overrightarrow{P_0A}\times\boldsymbol{S}$，故必在 π 内，同时 $\boldsymbol{U}\perp\boldsymbol{S}$，故 $\boldsymbol{U}$ 即是过 A 与已知直线垂直的直线的方向向量. 因此所求垂线就是

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+t\left[\boldsymbol{S}\times(\overrightarrow{P_0A}\times\boldsymbol{S})\right].$$

习 题 4·4

1. 求过定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 与定平面 $ax+by+cz+d=0$ 垂直的直线方程。

2. 求过定点 $A(a, b, c)$ 与定直线 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 垂直的平面方程。

3. 求过定点 $A(a, b, c)$ 与定直线 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 平行的直线方程。

4. 求过定点 $A(a, b, c)$ 与定直线

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

垂直的平面方程。

5. 求过定点 $A(a, b, c)$ 与定直线

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

平行的直线方程。

6. 求过定点 $A(a, b, c)$ 且与两直线

$$\frac{x-x_i}{l_i}=\frac{y-y_i}{m_i}=\frac{z-z_i}{n_i}\quad (i=1,\ 2)$$

都垂直的直线方程。

7. 求过定点 $A(a, b, c)$，且与两直线

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

和 $$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,\quad a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0$$

都垂直的直线方程。

8. 求过定点 $A(a, b, c)$ 与直线 $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ 垂直且与直线 $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ 相交的直线方程。

9. 求过定点 $A(a, b, c)$ 与直线

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

垂直且与直线

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,\quad a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0$$

相交的直线方程。

10. 求过定点 $A(a, b, c)$ 且与两直线

$$\frac{x-x_i}{l_i}=\frac{y-y_i}{m_i}=\frac{z-z_i}{n_i} \quad (i=1, 2)$$

都平行的平面方程.

11. 求过定点 $A(a, b, c)$ 且与两直线

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

和 $$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0, \quad a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0$$

都平行的平面方程。

12. 求过两点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, 2)$ 且与直线

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

平行的平面方程。

13. 求过两点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, 2)$ 且与直线

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

平行的平面方程。

14. 求直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 在平面 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{p}+d=0$ 上的投射平面方程。

15. 求过直线 $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ 且垂直于两直线 $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{l}$ 和 $\frac{x-a}{n}=\frac{y-b}{l}=\frac{z-c}{m}$ 所定的平面方程。

16. 利用平面束推出两相交直线所定的平面方程 (12) 及两平行直线所定的平面方程(14).

17. 求过定点 A 与定直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 垂直且与定平面 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{p}+d=0$ 平行的直线方程。

*18. 求过定点 A 与定直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 相交且与定平面 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{p}+d=0$ 平行的直线方程。

[提示: 利用混合积推出所求直线的方向向量.]

19. 由图 4-9 推求 $\overrightarrow{AT}$,再求点 A 到直线 l 的距离公式。

*20. 求证过三面角的各棱与对面垂直的三平面必共线.

[提示: 设三个棱是 $\frac{x}{l_i}=\frac{y}{m_i}=\frac{z}{n_i}$ $(i=1, 2, 3)$,再利用第三章第七节定理 3.]

本章提要

1. 空间直线方程的各种形式

(1) 坐标形式和向量形式的直线方程的参数式、对称式、两点式、普遍式、投射式．其中参数式和普遍式是最基本的，也是常用到的．

(2) 在方程中要注意每个量是常量还是变量或是参数．

(3) 注意方程中每个量的几何意义．

(4) 直线方程同一类型的向量形式和坐标形式的互化以及直线方程不同类型的互化．

(5) 四条件确定一空间直线．

2. 直线和平面的关系

(1) 位置关系共分三种，可通过坐标方程系数间的关系或向量方程中有关向量来判定．

(2) 度量关系——直线和平面的交角．

3. 两直线的关系

(1) 位置关系共分四种：(i) 利用直线参数方程向量形式中有关向量来判定；(ii)利用坐标形式的直线方程参数式中系数所构成的矩阵的秩来判定．

(2) 度量关系：(i)点到直线的距离；(ii)两平行线间的距离；(iii)两异面直线的距离以及它们的公垂线方程．

4. 平面和空间直线的结合问题

(1) 确定平面方程时，要根据已知条件，一般先定法线向量．

(2) 确定空间直线方程时，要根据已知条件，一般先确定方向向量．

(3) 利用过空间直线（普遍式或对称式）的平面束解决平面和直线的结合问题．

复习题四

1. 设平面 $ax+by+cz+d=0$ 与三坐标面都相交，求交线方程的对称式．

2. 设直线 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 与三坐标面都相交，求交点的坐标.

3. 试定 d, 使直线 $2x+3y-z+d=0$, $3x-2y+2z-6=0$ 与(1) x 轴; (2) y 轴; (3) z 轴分别相交.

4. 如果直线 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ (1)过原点; (2)与 x 轴平行; (3)与 y 轴重合; (4)与 z 轴相交，则各系数间分别有什么关系?

5. 如果直线 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ (1)与 yz 面平行; (2)与 xy 面重合，则各系数间分别有什么关系?

6. 如果直线 $x+2y+3z=0$, $3x+2y+z=0$ 的方向角是 α, β, γ, 求证 $\gamma=\alpha$, $\sec^2\beta=3$.

7. 求直线

$$lx+my+nz=mx+ny+lz=nx+ly+mz$$

的对称式.

8. 求过原点且与 y 轴及 z 轴构成 $30°$ 角的平面方程.

9. 求三个不同的平面 $\boldsymbol{m}_i\cdot\boldsymbol{p}+d_i=0\ (i=1, 2, 3)$ 都平行于一条定直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 的充要条件.

10. 求三条不同的直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}_i\ (i=1, 2, 3)$ 共面的充要条件，且求所在平面的方程.

11. 求过直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 且与直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{T}$ 平行的平面方程.

12. 求过直线 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$, (1)与 x 轴平行; (2)与 $\dfrac{x-a}{\lambda}=\dfrac{y-b}{\mu}=\dfrac{z-c}{\nu}$ 平行; (3)与直线 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 平行; (4)与平面 $ax+by+cz+d=0$ 垂直的平面方程.

13. 求过直线 l_1: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 且与直线 l_2: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 平行的平面方程，但 $l_1 \nparallel l_2$.

14. 求过定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 又与定平面 $ax+by+cz+d=0$ 平行，且与定直线 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$、$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 共面的直线方程.

15. 求过定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 并与已知直线 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 垂直且相交的直线方程。

16. 先证两直线

$$\begin{cases}2x+3y-z-1=0\\x+y-3z=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}x+5y+4z-3=0\\x+2y+2z-1=0\end{cases}$$

相交，再求所在平面的方程。

17. 先证两直线

$$\begin{cases}2x+3y-4z=0\\3x-4y+z=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}5x-y-3z-1=0\\x-7y+5z+1=0\end{cases}$$

平行，再求所在平面的方程。

18. 已知两直线 $u_1=0$, $u_2=0$; $u_3=0$, $u_4=0$. 其中

$$u_i \equiv a_ix+b_iy+c_iz+d_i \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

求证 $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0$, $\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq0$ 及 $\lambda_3u_3+\lambda_4u_4=0$, $\lambda_3^2+\lambda_4^2\neq0$ 表示与已知两直线都共面的直线方程.

19. 已知直线 l: $\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\cos\beta}=\dfrac{z-z_0}{\cos\gamma}$, 设从原点到 l 的距离及原点到 l 在三个坐标面上射影的距离分别是 d 和 d_1, d_2, d_3. 求证

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2-d^2=d_1^2\cos^2\alpha+d_2^2\cos^2\beta+d_3^2\cos^2\gamma.$$

[提示：利用复习题 1 习题 23.]

20. 设一直线的三个方向角都相等，求证过此直线上任一定点所作的任意平面在三个坐标轴上的截距的倒数之和为常数.

*21. 设两直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_2$ 相交，求证交点的位置向量是

$$\boldsymbol{P}_1+\frac{(\boldsymbol{S}_2,\ \boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2)}{(\boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2)}\boldsymbol{S}_1$$

或

$$\boldsymbol{P}_2+\frac{(\boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2)}{(\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2)}\boldsymbol{S}_2.$$

并验证这两个向量相等.

22. 设有两条平行线 l_1 及 l_2, 在 l_1 及 l_2 上各取 Q_1 及 Q_2, 作 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ_1}+\overrightarrow{OQ_2}$. 求点 P 的轨迹.

23. (1) 求两相交直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}_1$ 及 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}_2$ ($\boldsymbol{S}_1 \nparallel \boldsymbol{S}_2$) 所在平面的方程;

(2) 求两平行直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}$ 所在平面的方程;

(3) 当$(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)\neq 0$, $(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)\neq 0$时，上面所求的两平面必相交，求交线的参数方程.

*24. 已知直线 l: $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 及 l 外的一定点 $A(a, b, c)$. 求 A 关于 l 的对称点的坐标以及在 l 上的射影的坐标.

[提示: 过 A 作与 l 垂直的平面.]

25. 已知六条直线 $l_i(i=1, 2, \cdots, 6)$，其中前三条及后三条中的每两条都不共面. 如果 l_2, l_3; l_3, l_1; l_1, l_2 的公垂线分别与 l_4, l_5, l_6 平行，求证 l_4, l_5; l_5, l_6; l_6, l_1 的公垂线也分别与 l_1, l_2, l_3 平行.

[提示: 利用公垂线的方向向量.]

思 考 题 四

1. 如果边长是 a, b, c 的三角形的三边与坐标轴的交点恰是该边的中点. 求此三角形所在的平面在三个坐标轴上的截距以及三顶点的坐标.

2. 如果直线的普遍式是

$$\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{p}+d_1=0,\ \boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{p}+d_2=0;\ \boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2\neq\boldsymbol{O},\ d_1^2+d_2^2\neq 0.$$

则它的对称式可以写作

$$\boldsymbol{p}=\frac{(\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2)\times(d_1\boldsymbol{m}_2-d_2\boldsymbol{m}_1)}{|\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2|^2}+t(\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2).$$

3. 求从直线 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$到此直线的垂直且相交的直线的方程、垂足坐标以及点到直线的距离.

4. 讨论两直线

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

与

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

以及

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

与

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0, \quad a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0$$

的位置关系和度量关系.

5. 已知 $\triangle ABC$ 及一条直线 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$. (1) 求直线与此三角形所在的平面相交的充要条件; (2)如相交，求其交点; (3)求交点落在三角形内部的充要条件.

第五章

曲面方程和空间曲线方程

在平面解析几何里将曲线作为点的轨迹，当建立了坐标系后，即可得到它的方程，从而可以研究曲线的性质．同理，在空间建立了坐标系后，将图形作为适合某些条件的动点的轨迹，也可得到图形的方程，从而研究图形的性质．前面两章就是这样对平面和空间直线进行研究的．它们是两类最简单的空间图形．本章就是在前两章的基础上扩建空间图形的方程．并将空间图形分成两大类——曲面和空间曲线，然后分别建立它们的方程再进行讨论．

第一节　空间点的轨迹

在平面几何里，所研究的点的轨迹仅有一种，就是曲线．例如：与一定点的距离是常数的点的轨迹是一个圆；与两定点的距离的和是常数的点的轨迹是一个椭圆等等．

在立体几何里所研究的点的轨迹可有两种：

1．仅在一个条件下运动的空间点的轨迹一般说是一个曲面．例如空间的点与一定点所成的向量永远和某一常向量垂直，则动点的轨迹是一个平面，且这平面与常向量垂直；又如与一定点的距离是常数的空间的点的轨迹是一个球面等等．

2. 同时在两个条件下运动的空间的点的轨迹，一般来说是一条空间曲线[注]. 这是因为适合一个条件的点的轨迹既然是曲面，那么适合两个条件的点的轨迹必是两个曲面相交而成的曲线. 现在来看：空间的点与一定点所成的向量永远和某两个常向量分别垂直，则这个点的轨迹是什么？我们已经知道：空间的点与一定点所成的向量永远和某一常向量垂直，则动点的轨迹是一个平面，故所求的轨迹应是两平面的交线，即空间直线. 又如，已知三个不共线的点 P_1、P_2 和 P_3，则与 P_1 的距离是 r，与 P_2、P_3 二点的距离恒相等的空间点的轨迹是一个圆. 这是因为适合第一个条件的点的轨迹是以 P_1 为球心、r 为半径的球面，而适合第二个条件的点的轨迹是 P_2P_3 的中垂面，故同时适合这两个条件的点的轨迹必是球面与平面的交线，即一个圆.

至于条件的个数必须辨别清楚. 例如空间一点与 P_1、P_2、P_3 三点的距离恒相等，则它所适合的条件的数目实际上是两个，即动点(1)与 P_1、P_2 的距离相等，(2)与 P_2、P_3 的距离也相等. 上面所说的轨迹是两种完全不同的图形，读者必须细心分别清楚.

习 题 5·1

1. 求到三点等距离的点的轨迹，分共线与不共线两种情况来考虑.
2. 读者自己试举一个轨迹是曲面的实例；再举一个轨迹是空间曲线的实例.

[注] 这里所说的空间曲线一般是指它上面的点不都在一个平面上，特殊时，这些点也可能都在某一平面上，这时空间曲线就化为平面曲线了.

第二节 曲 面

2·1 第一个基本问题——曲面的方程

关于曲面方程的概念和平面解析几何里曲线方程的概念完全一样. 由于曲面一般是适合一个条件的点的轨迹，于是在建立适当的坐标系后，可以将点变动的规律通过坐标用方程表示出来. 先设 $P(x, y, z)$ 为曲面上的一动点，再根据所给的条件，用与平面解析几何相似的方法，就可以求出含 x, y, z 的一个方程

$$F(x, y, z)=0 \quad 或 \quad z=f(x, y).$$

凡曲面上任何点的坐标都适合这个方程，而坐标适合这个方程的点必在曲面上，我们把这个方程叫做*曲面的方程*. x, y, z 叫做动点的*流动坐标*. 为了方便，我们以后把一个曲面方程 $F(x, y, z)=0$ 简称为曲面 $F(x, y, z)=0$.

推论 一个点在曲面 $F(x, y, z)=0$ 上的充要条件是：这点的坐标适合这个方程.

事实上，在第一章第一节与第二节里，我们已经将一些表示曲面的简单轨迹问题，利用上面的方法建立了轨迹的方程. 下面再举一些例题说明曲面方程的建立方法.

【例 1】 求与空间 n 个定点的距离的平方和是常数的点的轨迹方程.

解：由于给定的条件是一个，故所求的轨迹必是曲面，现在推求它的方程：先建立一个直角坐标系，设 n 个定点为 $P_r(x_r, y_r, z_r)$ $(r=1, 2, \cdots, n)$，又 $P(x, y, z)$ 是动点. 则 $\sum\limits_{r=1}^{n}|PP_r|^2=k^2$（$k$ 是常数）. 即

$$\sum_{r=1}^{n}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2+(z-z_r)^2]=k^2.$$

展开得

$$n(x^2+y^2+z^2)-2\left(\sum_{r=1}^{n}x_r\right)x-2\left(\sum_{r=1}^{n}y_r\right)y-2\left(\sum_{r=1}^{n}z_r\right)z$$

$$+\sum_{r=1}^{n}(x_r^2+y_r^2+z_r^2)-k^2=0.$$

这就是所求的轨迹方程.

【例 2】 求与 n 个平面的距离的平方和是常数的点的轨迹方程.

解：设 n 个平面方程的法线式是

$$x\cos\alpha_r+y\cos\beta_r+z\cos\gamma_r-p_r=0\ (r=1,\ 2\cdots n).$$

又设动点为 $P(x,\ y,\ z)$，它到这 n 个平面的距离是 d_r，于是

$$d_r=|x\cos\alpha_r+y\cos\beta_r+z\cos\gamma_r-p_r|,$$

由假设 $\sum_{r=1}^{n}d_r^2=k^2$ (k 是常数)，即

$$\sum_{r=1}^{n}(x\cos\alpha_r+y\cos\beta_r+z\cos\gamma_r-p_r)^2=k^2.$$

展开得

$$x^2\sum_{r=1}^{n}\cos^2\alpha_r+y^2\sum_{r=1}^{n}\cos^2\beta_r+z^2\sum_{r=1}^{n}\cos^2\gamma_r$$

$$+2yz\left(\sum_{r=1}^{n}\cos\beta_r\cos\gamma_r\right)+2zx\left(\sum_{r=1}^{n}\cos\gamma_r\cos\alpha_r\right)$$

$$+2xy\left(\sum_{r=1}^{n}\cos\alpha_r\cos\beta_r\right)-2x\left(\sum_{r=1}^{n}p_r\cos\alpha_r\right)$$

$$-2y\left(\sum_{r=1}^{n}p_r\cos\beta_r\right)-2z\left(\sum_{r=1}^{n}p_r\cos\gamma_r\right)$$

$$+\sum_{r=1}^{n}p_r^2-k^2=0.$$

这就是所求的轨迹方程.

【例 3】 求到两直线等距离的点的轨迹方程.

解：1. 两直线平行的情况

以此两直线 l_1 和 l_2 的一条公垂线为 x 轴，又以 l_1 与 l_2 截 x 轴所成线段的中垂线为 y 轴，而建立空间直角坐标系(图 5-1). 于是这两条直线的方程是

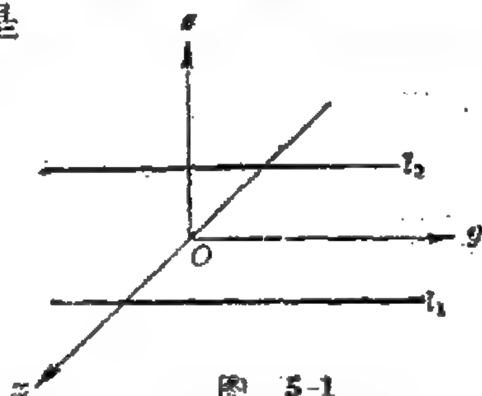


图 5-1

$$l_1:\ x=a,\ z=0,\ a\neq 0$$

或
$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0};$$

$$l_2:\ x=-a,\ z=0,\ a\neq 0$$

或
$$\frac{x+a}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}.$$

设动点为 $P(x,\ y,\ z)$，利用点到直线的距离公式，得
$$\sqrt{z^2+(x-a)^2}=\sqrt{z^2+(x+a)^2}.$$
将等式两端平方并化简，得 $x=0$，此即 yz 面.

2. 两直线相交的情况

(1) 设 l_1 与 l_2 垂直，以此两直线分别为 x 轴及 y 轴，而建立空间直角坐标系. 设动点为 $P(x,\ y,\ z)$，则由距离公式，得 $\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{z^2+x^2}$. 将等式两端平方并化简，得 $x^2-y^2=0$，即 $x\pm y=0$，此表示两个互相垂直的平面.

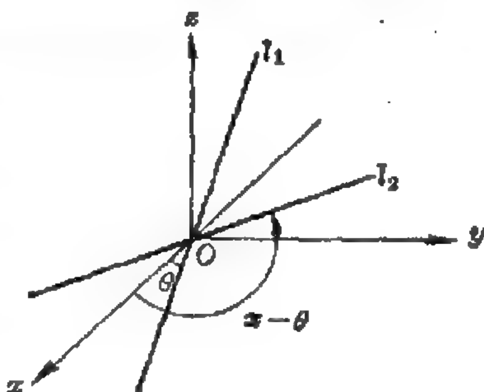


图 5-2

(2) 设 l_1 与 l_2 不垂直，以 l_1 与 l_2 的两条平分角线为 x 轴和 y 轴，而建立空间直角坐标系(图 5-2). 于是这两条直线的方程是

$$l_1: y=x\operatorname{tg}\theta,\ z=0\ \left(\theta\neq 0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

或
$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=\frac{z}{0};$$

$$l_2: y=x\operatorname{tg}(\pi-\theta),\ z=0\ \left(\theta\neq 0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

或
$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{-\sin\theta}=\frac{z}{0}.$$

设动点为 $P(x, y, z)$，则由距离公式，得

$$\sqrt{z^2\sin^2\theta+z^2\cos^2\theta+(x\sin\theta-y\cos\theta)^2}$$
$$=\sqrt{z^2\sin^2\theta+z^2\cos^2\theta+(x\sin\theta+y\cos\theta)^2}.$$

将等式两端平方并化简，得 $xy=0$，即 $x=0$ 或 $y=0$，此表示 yz 面或 zx 面。

3．两直线异面的情况

(1) 设 l_1 与 l_2 垂直，由第四章第三节所建立的坐标系可知，此两条异面直线可以写成

$$l_1: z=c,\ x=0 \quad 或 \quad \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-c}{0};$$

$$l_2: z=-c,\ y=0 \quad 或 \quad \frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+c}{0}.$$

设动点为 $P(x, y, z)$，则由距离公式，得

$$\sqrt{(z-c)^2+x^2}=\sqrt{(z+c)^2+y^2}.$$

将等式两端平方并化简，得

$$x^2-y^2-4cz=0,$$

此即所求的轨迹方程。

(2) 设 l_1 与 l_2 不垂直，由第四章第三节所建立的坐标系可知，此两条异面直线可以写成

$$l_1:\ y=x\operatorname{tg}\theta,\ z=c\left(\theta\neq\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

或
$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=\frac{z-c}{0};$$

$$l_2:\ y=-x\operatorname{tg}\theta,\ z=-c\left(\theta\neq\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

或
$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{-\sin\theta}=\frac{z+c}{0}.$$

设动点为 $P(x, y, z)$，则由距离公式，得

$$\sqrt{(z-c)^2\sin^2\theta+(z-c)^2\cos^2\theta+(x\sin\theta-y\cos\theta)^2}$$
$$=\sqrt{(z+c)^2\sin^2\theta+(z+c)^2\cos^2\theta+(x\sin\theta+y\cos\theta)^2}.$$

将等式两端平方并化简，得

$$xy\sin\theta\cos\theta+cz=0.$$

此即所求的轨迹方程.

2·2 第二个基本问题——三元方程的几何意义

我们已经看到：作为点的轨迹的曲面可以用上面的点的坐标间的三元方程 $F(x, y, z)=0$ 来表示．反之，变数 x、y 和 z 间的任何三元方程 $F(x, y, z)=0$，一般来说是表示曲面.

下面要注意 $F(x, y, z)=0$ 的几种特殊形式：

1．假如方程 $F(x, y, z)=0$ 的左端可以分解为两个（或多个）因式 $F_1(x, y, z)$ 和 $F_2(x, y, z)$，于是曲面 $F(x, y, z)=0$ 可以分解为两个（或多个）曲面．它们分别由方程

$$F_1(x, y, z)=0 \quad 和 \quad F_2(x, y, z)=0$$

表示．这时称已知曲面为变态曲面．例如

$$F(x, y, z)\equiv xyz=0,$$

则 $F(x, y, z)=0$ 就是变态曲面，它表示三个坐标面.

2．方程 $F(x, y, z)=0$ 所表示的轨迹可能是一个或几个孤立点．例如

$$F(x, y, z)\equiv(x^2+y^2+z^2)[(x-1)^2 + (y-1)^2+(z-1)^2]=0$$

就表示两个孤立点(0, 0, 0)和(1, 1, 1)．

3．方程 $F(x, y, z)=0$ 所表示的轨迹可能是一条或几条曲线，例如

$$F(x, y, z)\equiv(x^2+y^2)(y^2+z^2)=0$$

就表示

$$x^2+y^2=0 \quad 或 \quad y^2+z^2=0,$$

也就是

$$x=0,\ y=0 \quad 或 \quad y=0,\ z=0.$$

这表示 z 轴或 x 轴．也就是说，$F(x,y,z)=0$ 包含 x 轴和 z 轴两条直线．

4．方程 $F(x, y, z)=0$ 也可以不表示任何实的轨迹，例如方程

$$x^2+y^2+z^2+1=0$$

不能为坐标 x, y 和 z 的任何实值所适合，而仅能由坐标的虚值所适合，我们说这方程表示虚轨迹或简单地说无轨迹．

2·3 第三个基本问题——曲面方程的讨论

在平面解析几何里，我们知道：直接利用轨迹研究曲线的形状是不容易的，因此，要先建立曲线的方程，通过对方程的讨论才比较容易地作出曲线的图形．同样，对空间轨迹所表示的曲面，也是要先建立曲面的方程，然后对方程进行讨论，才容易知道曲面的形状．为了以后应用方便，我们把曲面与

平面相交而成的平面曲线叫做平截线．特殊时，对坐标面上的平截线叫做截部．与坐标面平行的平面所产生的平截线叫曲面的轮廓线(或围道线)．特别是利用轮廓线可以说明曲面的大致形状．

若已知曲面方程 $F(x, y, z)=0$，与讨论平面上的曲线方程一样，可对曲面方程作以下的讨论：

1．截距　曲面在三个坐标轴上的截距，规定为它与 x 轴、y 轴及 z 轴交点的横标、纵标及立标．由此可得求曲面截距的法则：

在曲面方程中，令 $y=z=0$(或 $z=x=0$，或 $x=y=0$)，所得到的 x(或 y 或 z)的实值，即曲面在 x 轴(或 y 轴或 z 轴)上的截距．

2．截部　曲面 $F(x, y, z)=0$ 在三个坐标面上的截部分别是：

$$F(0, y, z)=0,\ x=0;\ F(x, 0, z)=0,\ y=0;$$

和

$$F(x, y, 0)=0,\ z=0.$$

3．对称性　如果曲面上的任意一点关于某坐标轴，坐标面，或原点的对称点仍在该曲面上，则称这曲面关于某坐标轴、坐标面或原点对称．由此定义及第一章第一节例4，可得曲面对称性的判别法则：

(1) 如将曲面方程中的一个变数（例如 x）的符号改变，而曲面方程不变，则此曲面必关于不含该变数所对应的坐标面(例如 yz 面)对称．

(2) 如将曲面方程中的两个变数（例如 y, z）的符号改变，而曲面方程不变，则此曲面必关于第三变数所对应的坐标轴(例如 x 轴)对称．

(3) 如将曲面方程中的三个变数的符号同时改变，而方

程不变，则此曲面必关于原点对称.

4．轮廓线　曲面 $F(x, y, z)=0$ 在 $x=u$, $y=v$, $z=w$ 的三个平面上的轮廓线分别是：

$$F(u, y, z)=0,\ x=u;\ F(x, v, z)=0,\ y=v;$$

$$F(x, y, w)=0,\ z=w.$$

如果平行于某一个坐标面的平面，不管它与坐标面距离多远，而所产生的轮廓线永远是实截线，则此曲面可以伸展到无穷远.

【例 4】　讨论曲面 $x^2+z^2=4y$ 的形状.

解：1．截距　在三个坐标轴上的截距都是 0，也就是说，曲面通过原点.

2．截部

(1) 令 $x=0$，得 yz 面上的截部是抛物线 $z^2=4y$, $x=0$;

(2) 令 $y=0$，在 zx 面上的截部是原点；

(3) 令 $z=0$，在 xy 面上的截部是抛物线 $x^2=4y$, $z=0$.

3．对称性　此曲面关于 xy 面、yz 面及 y 轴均对称.

4．轮廓线

(1) $x=u$ 的平截线是 $z^2=4y-u^2$, $x=u$. 利用平移 $x=x'+u$, $y=y'+\frac{u^2}{4}$, $z=z'$，则上面方程可化为 $z'^2=4y'$, $x'=0$. 此表示 $y'z'$ 面上的顶点是新原点的一条抛物线，也就是 $x=u$ 上的顶点是$\left(u, \frac{u^2}{4}, 0\right)$的一条抛物线. 由于 u 是任意实数，可知曲面在 yz 面两侧且伸延至无穷远.

(2) $y=v$ 的平截线是 $x^2+z^2=4v$, $y=v$. 利用平移 $x=x'$, $y=y'+v$, $z=z'$，则上面方程可化为 $x'^2+z'^2=4v$, $y'=0$. 此表示在 $z'x'$ 面上圆心在新原点的一个圆，其半径是

$2\sqrt{v}$．当 $v>0$ 时，为实圆；$v<0$ 时，为虚圆；$v=0$ 时，为点圆．也即此曲面仅在 zx 面右侧．当 v 由 0 无限变大时，此圆半径无限伸长，因此曲面伸延至无穷远．

(3) $z=w$ 的平截线是 $x^2=4y-w^2$，$z=w$．由 (1) 的讨论可知：曲面在 xy 面两侧，且伸延至无穷远．曲面的形状见图 5-3．

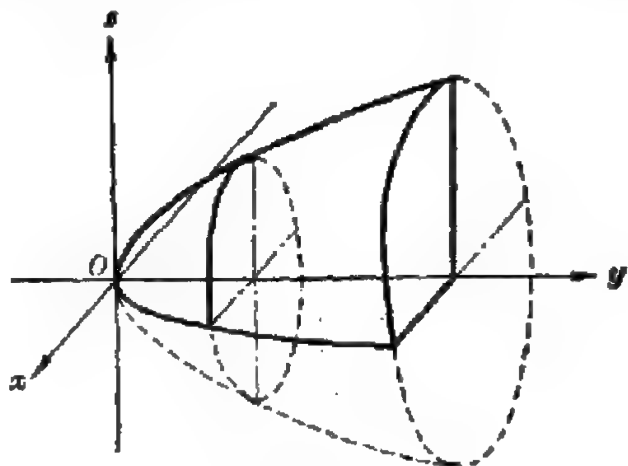


图 5-3

【例 5】 讨论曲面

$$a^2x^2+b^2y^2=z^4$$

$(a>0,\ b>0)$

的形状．

解：1．截距 在各轴的截距为零，曲面过原点．

2．截部

(1) 令 $x=0$，在 yz 面上的截部是两个抛物线（见图 5-4）；

(2) 令 $y=0$，在 zx 面上的截部是两个抛物线（见图 5-5）；

(3) 令 $z=0$，在 xy 面上的截部是原点．

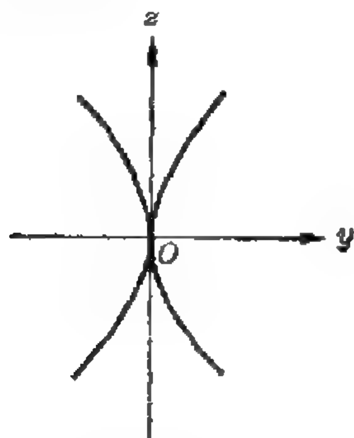


图 5-4

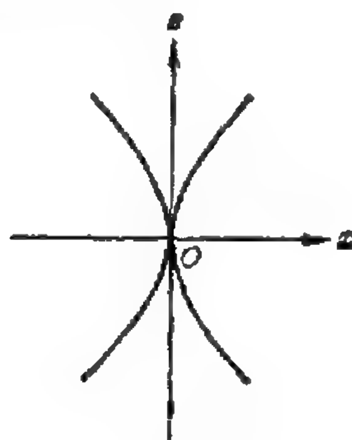


图 5-5

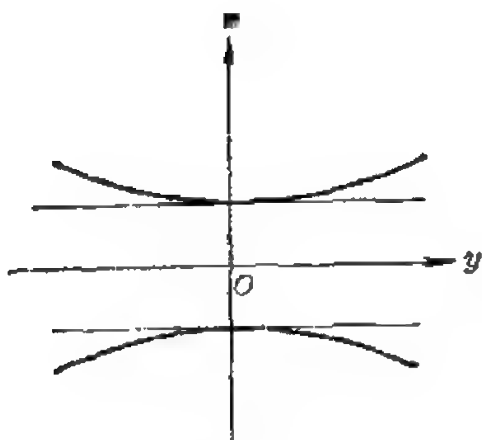


图 5-6

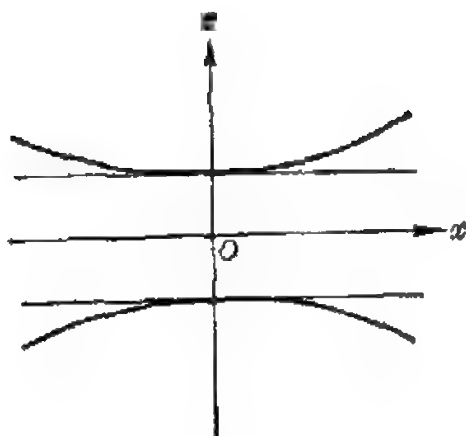


图 5-7

3. 对称性　关于坐标面、坐标轴和原点均对称.

4. 轮廓线

(1) $x=u$ 的平截线是四次平面曲线

$z^4=b^2y^2+a^2u^2,\ x=u$　或　$by=\pm\sqrt{(z^2-au)(z^2+au)}$, $x=u$(见图 5-6), 曲面在 yz 面的两侧伸延至无穷远.

(2) $y=v$ 的平截线是 $z^4=a^2x^2+b^2v^2,\ y=v$(见图 5-7), 曲面在 zx 面的两侧伸延至无穷远.

(3) $z=w$ 的平截线是椭圆 $a^2x^2+b^2y^2=w^4,\ z=w$. 当 w 由 0 增至 $+\infty$ 时, 椭圆变大, 当 w 由 $-\infty$ 减至 0 时, 椭圆变小, 曲面在 xy 面两侧都伸延至无穷远.

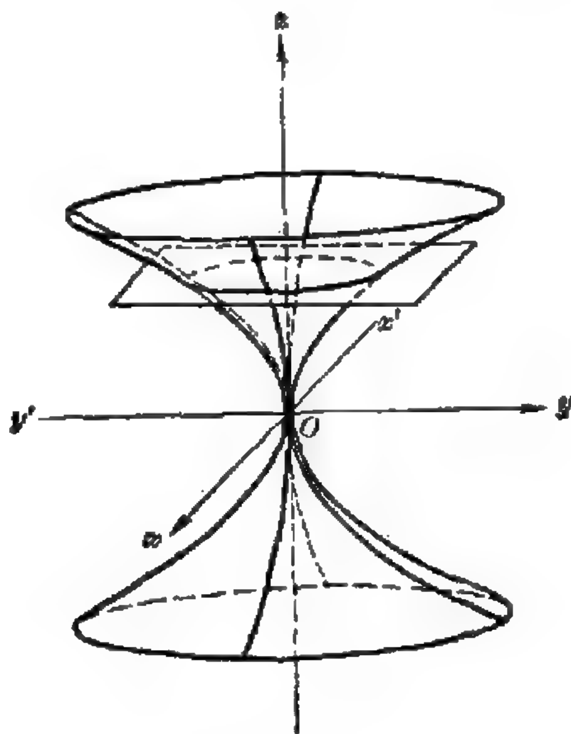


图 5-8

5. 过 z 轴的平面 $y=kx$ 的平截线是

$$z^4=x^2(a^2+b^2k^2),$$
$$y=kx,$$

这表示两个抛物线

$$z^2=\pm x\sqrt{a^2+b^2k^2},\ y=kx,$$

曲面的形状如图 5-8.

【例 6】 讨论曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 的形状。

解：1. 截距 令 $y=z=0$，得 x 轴上的截距为 a，同理，在 y 轴及 z 轴上的截距都是 a.

2. 截部 令 $x=0$，得 yz 面上的截部是抛物线弧，与 y 轴及 z 轴分别切于 $B(0,\ a,\ 0)$ 及 $C(0,\ 0,\ a)$（见图 5-9(a)）. 同理，在 zx 面上的截部是抛物线弧，与 z 轴及 x 轴分别切于 $C(0,\ 0,\ a)$ 和 $A(a,\ 0,\ 0)$；在 xy 面上的截部是抛物线弧，与 x 轴及 y 轴分别切于 $A(a,\ 0,\ 0)$ 和 $B(0,\ a,\ 0)$（见图 5-9(b)）.

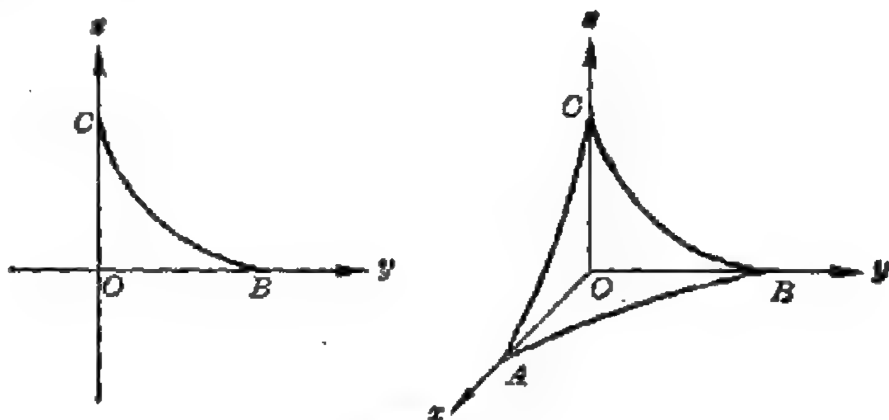


图 5-9

3. 轮廓线 $x=u$ 的平截线是 $\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}-\sqrt{u}$，$x=u$. 当 $a>u>0$ 时，此平截线为实截线，且是抛物线弧，同理，与其它坐标面平行的平截线也是抛物线弧. 由于所选的平面有限制，且 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$. 故表示第一卦限内的一个封闭曲面.

2·4 曲面的参数方程

在第三章第二节介绍了平面的参数方程，它含有两个独

立参数．现在来介绍一般曲面的参数方程．

定义 已知一个直角坐标系 $Oxyz$．将点 $P(x, y, z)$ 表示成两个变数 u, v 的函数，即

$$x=f(u, v),\ y=g(u, v),\ z=h(u, v)$$
$$(a\leqslant u\leqslant b,\ c\leqslant v\leqslant d). \tag{1}$$

如果对于 u, v 的一对值，由(1)确定的点 $P(x, y, z)$ 都在某一曲面上；反之，这曲面上的每一点的坐标都可以由 u, v 的某一对值通过(1)来表示，则(1)叫做曲面的参数方程，u, v 叫做参数．详细地说，(1)叫做坐标形式的曲面的参数方程．由(1)可以得向量形式的曲面的参数方程，即

$$\boldsymbol{P}=f(u, v)\boldsymbol{i}+g(u, v)\boldsymbol{j}+h(u, v)\boldsymbol{k}$$
$$(a\leqslant u\leqslant b,\ c\leqslant v\leqslant d). \tag{2}$$

如果将(1)中的两个参数 u, v 消去，就得到 $F(x, y, z)=0$，这就是前面所提到的曲面的方程．与参数方程相对照，$F(x, y, z)=0$ 有时称为曲面的普遍方程．

由于(1)中的 u, v 可以用其它参数 u', v' 来替换，所以曲面的参数方程不是唯一的．例如

$$u=\phi(u', v'),\ v=\psi(u', v')$$
$$(\alpha\leqslant u'\leqslant\beta,\ \gamma\leqslant v'\leqslant\delta). \tag{3}$$

则(1)就可以写成

$$x=f[\phi(u', v'), \psi(u', v')]=F(u', v').$$

同此，

$$y=G(u', v'),\ z=H(u', v')\ \ (\alpha\leqslant u'\leqslant\beta,\ \gamma\leqslant v'\leqslant\delta). \tag{4}$$

【例 7】 求曲面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 的参数方程．

解：令 $z=r\sin\phi\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，代入已知方程中，得 $x^2+y^2=r^2\cos^2\phi$，于是可设 $x=r\cos\phi\cos\theta$，$y=r\cos\phi\sin\theta$

$(-\pi<\theta\leqslant\pi)$. 所求参数方程是

$$x=r\cos\phi\cdot\cos\theta,\ y=r\cos\phi\cdot\sin\theta,\ z=r\sin\phi.$$

关于参数 ϕ 和 θ 的几何意义见第六章第一节.

【例 8】 求曲面 $x=u\cos\phi, y=u\sin\phi, z=u\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}, -\infty<u<+\infty\right)$的普遍方程.

解：由前两式平方相加，得

$$x^2+y^2=u^2.$$

利用第三式得

$$x^2+y^2=z^2.$$

习 题 5·2

1. 说明下列方程表示什么图形：
   (1) $(x-a)(y-b)(z-c)=0$;
   (2) $(x^2+y^2+z^2)^2=0$;
   (3) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$;
   (4) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$;
   (5) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+r^2=0$;
   *(6) $x^2+y^2+1=\sin z$.
2. 讨论下列曲面的形状：
   (1) $x^2+y^2=1$;　　(2) $y^2+z^2=4y$;
   (3) $x^2+y^2=z^2$;　　(4) $x^2+y^2-z^2+2xy=0$;
   (5) $z=xy$;　　(6) $y^4=4a^2(x^2+z^2)$.
3. 求到点(0, 0, 3)的距离为到 xy 面的距离的 2 倍的点的轨迹方程，并讨论它的形状.
4. 求到平面 $x+y=1$ 与到 z 轴等距的点的轨迹方程，并讨论它的形状.

*5. 求到两定点的距离之和(或差)为常数的点的轨迹方程. 并讨论它的形状.

[提示：取两定点为$(c, 0, 0)$，$(-c, 0, 0)$；常数为$2a$.]

*6．求曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的参数方程.

[提示：参照例6.]

*7．讨论曲面$xyz=a^3$，$a>0$的形状.

第三节　空间曲线

3·1　第一个基本问题——空间曲线的方程

由于空间曲线一般是适合两个条件的点的轨迹．于是选定坐标系以后，以(x, y, z)为某条空间曲线上的一动点，则由此点所适合的两个条件就可以求出含x，y，z的两个方程$F(x, y, z)=0$和$G(x, y, z)=0$．该空间曲线上的任何点的坐标都适合这两个方程；反之，如坐标适合这两个方程的点必在空间曲线上，则这两个方程叫做该空间曲线的方程，x，y，z叫做动点的流动坐标.

推论　一个点在空间曲线$F(x, y, z)=0$，$G(x, y, z)=0$上的充要条件为这点的坐标适合这两个方程.

【例1】　求到两定点的距离分别是定数的点的轨迹方程.

解：以二定点A和B的联线为x轴，AB的中点为原点而建立坐标系．于是A的坐标为$(a, 0, 0)$，B的坐标为$(-a, 0, 0)$ $(a\neq0)$，设动点为$P(x, y, z)$，由假设得：$|PA|=m$，$|PB|=n$，这里m，n是定数，于是有

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2+z^2=m^2,\\(x+a)^2+y^2+z^2=n^2.\end{cases}$$

此方程组等价于以下的方程组（经加减而得）

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{2}(m^2+n^2-2a^2), \\ x=\dfrac{1}{4a}(n^2-m^2). \end{cases}$$

此即所求空间曲线的方程.

【例 2】 求到三面角的三个面所在的平面等距离的点的轨迹方程.

解: 取三面角的顶点为原点而建立坐标系. 设三个面所在平面的方程的法线式是

$$\lambda_i x+\mu_i y+\nu_i z=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

动点是 $P(x,\ y,\ z)$, 由假设条件得

$$|\lambda_1 x+\mu_1 y+\nu_1 z|=|\lambda_2 x+\mu_2 y+\nu_2 z|=|\lambda_3 x+\mu_3 y+\nu_3 z|,$$

即

$$\begin{aligned}\pm(\lambda_1 x+\mu_1 y+\nu_1 z)&=\pm(\lambda_2 x+\mu_2 y+\nu_2 z)\\ &=\pm(\lambda_3 x+\mu_3 y+\nu_3 z).\end{aligned}$$

共有 $+++$, $+--$, $-+-$, $--+$ 四种情况, 每种情况都表示过原点的一条直线, 故所求轨迹是过顶点的四条直线.

【例 3】 求到三面角的三个棱所在的直线等距离的点的轨迹方程.

解: 取三面角的顶点为原点而建立坐标系. 设三个棱所在直线的方程是

$$\frac{x}{\lambda_i}=\frac{y}{\mu_i}=\frac{z}{\nu_i},\ \lambda_i^2+\mu_i^2+\nu_i^2=1 \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

动点是 $P(x,\ y,\ z)$, 它到这三条直线的距离是 d_i, 于是

$$\begin{aligned} d_i^2&=(\nu_i y-\mu_i z)^2+(\lambda_i z-\nu_i x)^2+(\mu_i x-\lambda_i y)^2\\ &=(\mu_i^2+\nu_i^2)x^2+(\nu_i^2+\lambda_i^2)y^2+(\lambda_i^2+\mu_i^2)z^2\\ &\quad -2\mu_i\nu_i yz-2\nu_i\lambda_i zx-2\lambda_i\mu_i xy\\ &=(1-\lambda_i^2)x^2+(1-\mu_i^2)y^2+(1-\nu_i^2)z^2\\ &\quad -2\mu_i\nu_i yz-2\nu_i\lambda_i zx-2\lambda_i\mu_i xy. \end{aligned}$$

由假设知：$d_1^2=d_2^2=d_3^2$，从每项减去 $x^2+y^2+z^2$，得

$$\lambda_1^2x^2+\mu_1^2y^2+\nu_1^2z^2+2\mu_1\nu_1yz+2\nu_1\lambda_1zx+2\lambda_1\mu_1xy$$
$$=\lambda_2^2x^2+\mu_2^2y^2+\nu_2^2z^2+2\mu_2\nu_2yz+2\nu_2\lambda_2zx+2\lambda_2\mu_2xy$$
$$=\lambda_3^2x^2+\mu_3^2y^2+\nu_3^2z^2+2\mu_3\nu_3yz+2\nu_3\lambda_3zx+2\lambda_3\mu_3xy,$$

即

$$(\lambda_1x+\mu_1y+\nu_1z)^2=(\lambda_2x+\mu_2y+\nu_2z)^2=(\lambda_3x+\mu_3y+\nu_3z)^2.$$

从而有

$$\pm(\lambda_1x+\mu_1y+\nu_1z)=\pm(\lambda_2x+\mu_2y+\nu_2z)=\pm(\lambda_3x+\mu_3y+\nu_3z).$$

所以轨迹是过原点的四条直线.

3·2 第二个基本问题——两个三元方程的几何意义

由于一个三元方程 $F(x, y, z)=0$ 一般表示曲面，故方程组 $F(x, y, z)=0$，$G(x, y, z)=0$ 一般表示两个曲面的交线，即一条空间曲线. 例如方程组 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 在 $\frac{a_1}{a_2}$，$\frac{b_1}{b_2}$，$\frac{c_1}{c_2}$ 不成比例时，就表示一条直线. 又如 $y^2+z^2=0$，$x^2+y^2=0$ 表示 $y=z=0$ 和 $x=y=0$ 的交点，即原点.

我们已经知道，一条空间直线的方程可用过这直线的任意两个平面的方程来表示. 因此一条空间直线方程的表示式不是唯一的. 同样表示一条空间曲线的两个方程 $F(x, y, z)=0$ 和 $G(x, y, z)=0$ 可以由与它们等价的两个方程来代替. 因此空间曲线方程的表示也不是唯一的.

3·3 第三个基本问题——空间曲线方程的讨论

设有空间曲线 $F(x, y, z)=0$，$G(x, y, z)=0$. 一般来说它可以由下列三个等价方程组之一来代替：

$$\begin{cases} H_1(y, z)=0, \\ H_2(z, x)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} H_2(z, x)=0, \\ H_3(x, y)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} H_3(x, y)=0; \\ H_1(y, z)=0. \end{cases}$$

这些等价方程组的几何意义将在第六章第四节中讨论．由于讨论比较复杂，这里仅研究每组中有一个方程是与坐标面平行的平面的情况．

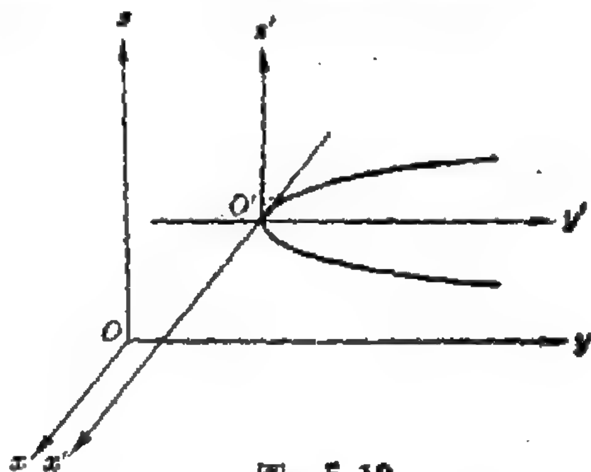


图 5-10

【例 4】 讨论方程组 $x^2+z^2=4y$，$z=4$ 所表示的空间曲线的概形．

解：已知方程组等价于 $x^2=4(y-4)$，$z=4$．利用平移 $x=x'$，$y=y'+4$，$z=z'+4$．上面方程可以写成 $x'^2=4y'$，$z'=0$，这表示 $x'y'$ 面上即 $z=4$ 上的一个抛物线．它的顶点是(0, 4, 4)(见图 5-10)．

3·4 空间曲线的参数方程

在第四章第一节中曾介绍了空间直线的参数方程，它仅含有一个参数．现在来介绍空间曲线的参数方程．

定义 已知一个直角坐标系 $Oxyz$，将点 (x, y, z) 表示成 t 的函数，即

$$x=f(t),\ y=g(t),\ z=h(t)\quad (t_1\leqslant t\leqslant t_2). \tag{1}$$

如果对于 t 的一个值，由(1)确定的点 $P(x, y, z)$ 都在某一条空间曲线上，反之，这条空间曲线上每一点的坐标都可由 t 的某一值通过(1)来表示，则(1)称为*空间曲线的参数方程*，t 称为参数．

详细地说，(1)称为坐标形式的空间曲线的参数方程．由(1)可以得到向量形式的空间曲线的参数方程，即

$$\boldsymbol{P}=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k} \quad (t_1\leqslant t\leqslant t_2). \tag{2}$$

如果(1)中的参数 t 可能消去而得到

$$F(x,\ y,\ z)=0,\ \ G(x,\ y,\ z)=0.$$

这就是前面所提到的空间曲线的方程. 与参数方程相对照, 它有时称为空间曲线的普遍方程. 由上面第二个基本问题可以得出空间曲线的普遍方程也不是唯一的.

由于(1)中的 t 可以用其它参数 t' 来替换, 所以空间曲线的参数方程也不是唯一的. 例如 $t=\phi(t')\,(\alpha\leqslant t'\leqslant\beta)$. 则(1)就可以写成

$$x=f[\phi(t')]=F(t'),\ y=G(t'),\ z=H(t') \quad (\alpha\leqslant t'\leqslant\beta). \tag{3}$$

【例 5】 求空间曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$ 的参数方程.

解: 将已知两个方程相减, 得 $z^2=a^2-b^2$,

即
$$z=\pm\sqrt{a^2-b^2}.$$

故已知方程组等价于 $x^2+y^2=b^2$, $z=\pm\sqrt{a^2-b^2}$. 所求参数方程是

$$x=b\cos\theta,\ \ y=b\sin\theta,\ \ z=\sqrt{a^2-b^2} \quad (0<\theta\leqslant 2\pi)$$

和

$$x=b\cos\theta,\ \ y=b\sin\theta,\ \ z=-\sqrt{a^2-b^2} \quad (0<\theta\leqslant 2\pi).$$

且 $a\geqslant b$ 时, 为实轨迹; $a<b$ 时, 为虚轨迹.

【例 6】 求曲线 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=\operatorname{tg} t\,(0<t\leqslant 2\pi)$ 的普遍方程.

解: 将前两式平方相加, 得 $x^2+y^2=1$, 再将前两式代入第三式, 得 $z=\dfrac{y}{x}$. 故所求的普遍式是

$$x^2+y^2=1,\ \ y=zx.$$

【例 7】 求证空间曲线 $x=t,\ y=\dfrac{1}{t}(1-t),\ z=\dfrac{1}{t}(1-t^2)$ $(-\infty<t<\infty,\ t\neq 0)$ 在一个平面上，且求所在平面的方程.

【证及解】 不论 t 值如何，$x-y+z=1$，即已知空间曲线上的所有点都在平面 $x-y+z=1$ 上. 故已知曲线是一条平面曲线. ▌

习 题 5·3

1. 说明下列方程表示什么图形:
   (1) $(x-a)(y-b)=0,\ z=0$;
   (2) $x^2+y^2=0,\ z=0$;
   (3) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+r^2=0,\ z=0$;
   (4) $x^2+y^2+1=\sin z,\ z=0$.
2. 讨论下列空间曲线的形状:
   (1) $x^2-4y^2=8z,\ z=1$;
   (2) $y^2+z^2-4x+8=0,\ y=4$.
3. 求到三个坐标面等距的点的轨迹方程.
4. 求到三个坐标轴等距的点的轨迹方程.

*5. 求到两定点等距离，又到另外两定点也等距离的点的轨迹方程，并加讨论.

6. 求空间曲线 $x^2+y^2=a^2,\ z=x^2-y^2$ 的参数方程.
7. 已知空间曲线

$$x=a\cdot\cos^2 t,\ y=a\cdot\sin^2 t,\ z=a\cdot\sin 2t\quad(0<t\leqslant\pi).$$

   (1) 求证它在一个平面上，且求所在平面的方程;
   (2) 求它的普遍方程.

第四节 空间坐标变换

4·1 坐标系的平移(续)

在第一章第一节中已经推出平移公式 (1). 现在仍旧采

用那种记法，用向量再推出公式(1)。在第一章图 1-13 中，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$. 又新系和旧系的三个基本向量相同，都是 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. 因此

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\ \overrightarrow{OO'}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{O'P}=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}.$$

于是化为

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x'+a)\boldsymbol{i}+(y'+b)\boldsymbol{j}+(z'+c)\boldsymbol{k}.$$

比较之，即得第一章第一节的(1)式.

与平面解析几何中平移的作用一样，利用适当的平移变换可以消去曲面方程中所含的一次项.

【例 1】 利用平移化去曲面

$$ax^2+by^2+cz^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad (abc\neq 0)$$

中的一次项.

解：将已知方程配方，得

$$a\left(x+\frac{u}{a}\right)^2+b\left(y+\frac{v}{b}\right)^2+c\left(z+\frac{w}{c}\right)^2$$
$$=\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}-d.$$

设 $x'=x+\frac{u}{a}$, $y'=y+\frac{v}{b}$, $z'=z+\frac{w}{c}$, 即以 $\left(-\frac{u}{a}, -\frac{v}{b}, -\frac{w}{c}\right)$ 为新原点作平移，上式化为

$$ax'^2+by'^2+cz'^2=\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}-d.$$

此即新系下的曲面方程.

【例 2】 以 $O_1(a_1, b_1, c_1)$, $O_2(a_2, b_2, c_2)$ 为新原点，经平移得两个新坐标系. 求 O_1O_2 的中点分别关于这两个新坐标系的坐标.

解：两组平移公式是

$$x=x_1'+a_1,\ y=y_1'+b_1,\ z=z_1'+c_1$$

和
$$x=x_2'+a_2,\ y=y_2'+b_2,\ z=z_2'+c_2.$$

这里(x, y, z)是一点在旧系里的坐标，(x_1', y_1', z_1')和(x_2', y_2', z_2')分别是这点关于两个新系的坐标．又O_1O_2的中点M在旧系里的坐标是$\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}, \frac{c_1+c_2}{2}\right)$，于是$M$在第一个新系里的坐标是$\left(\frac{a_1+a_2}{2}-a_1, \frac{b_1+b_2}{2}-b_1, \frac{c_1+c_2}{2}-c_1\right)$，即$\left(\frac{a_2-a_1}{2}, \frac{b_2-b_1}{2}, \frac{c_2-c_1}{2}\right)$. 同理，$M$在第二个新系里的坐标是$\left(\frac{a_1-a_2}{2}, \frac{b_1-b_2}{2}, \frac{c_1-c_2}{2}\right)$.

【例 3】 已知两对点$P_1(x_1, y_1, z_1)$、$P_2(x_2, y_2, z_2)$和$P_3(x_3, y_3, z_3)$、$P_4(x_4, y_4, z_4)$．求证
$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
和$(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(y_2-y_1)(y_4-y_3)+(z_2-z_1)(z_4-z_3)$是坐标平移下的不变式，并说明它们的几何意义．

【证及解】 以(a, b, c)为新原点，利用平移将$P_i(x_i, y_i, z_i)$变换为$P_i(x_i', y_i', z_i')$ $(i=1, 2, 3, 4)$. 由平移公式$x_i=x_i'+a$, $y_i=y_i'+b$, $z_i=z_i'+c$得出
$$x_2-x_1=x_2'-x_1',\ y_2-y_1=y_2'-y_1',\ z_2-z_1=z_2'-z_1';$$
$$x_4-x_3=x_4'-x_3',\ y_4-y_3=y_4'-y_3',\ z_4-z_3=z_4'-z_3'.$$

于是得
$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2};$$
$$(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(y_2-y_1)(y_4-y_3)+(z_2-z_1)(z_4-z_3)$$
$$=(x_2'-x_1')(x_4'-x_3')+(y_2'-y_1')(y_4'-y_3')$$
$$+(z_2'-z_1')(z_4'-z_3').$$

这就证明了上面两个式子是平移下的不变式. 现在看它们的几何意义: 设 d 表示 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的长度, θ 表示 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 及 $\overrightarrow{P_3P_4}$ 的夹角, 则

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2},$$

$$\cos\theta=\frac{\left(\begin{array}{c}(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(y_2-y_1)(y_4-y_3)\\+(z_2-z_1)(z_4-z_3)\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\\\times\sqrt{(x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2+(z_4-z_3)^2}\end{array}\right)}$$
$$=\frac{\left(\begin{array}{c}(x'_2-x'_1)(x'_4-x'_3)+(y'_2-y'_1)(y'_4-y'_3)\\+(z'_2-z'_1)(z'_4-z'_3)\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\sqrt{(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2}\\\times\sqrt{(x'_4-x'_3)^2+(y'_4-y'_3)^2+(z'_4-z'_3)^2}\end{array}\right)}.$$

从几何上看, d 和 θ 在坐标系平移下显然是不变的.

4·2 坐标系的旋转

所谓空间坐标系的旋转就是原点不动, 而坐标轴的方向变动, 但单位线段仍不动, 这与平面解析几何里的坐标系的旋转有相同的意义, 可是情况要比平面内的复杂得多.

先来看一种较简单却又非常有用的情况, 这就是: 一个坐标轴不动, 另外两个坐标轴围绕这个轴旋转的情况. 在图 5-11 中, Ox 与 Oy 绕 Oz 旋转 θ 角, 得到 Ox' 与 Oy', 而 Oz 不动, 即坐标系 $Oxyz$ 经旋转后得到坐标系 $Ox'y'z$. 如果一个点的新、旧坐标分别是 (x, y, z) 和 (x', y', z'), 而这点的立标不变, 那么横标与纵标的改变就

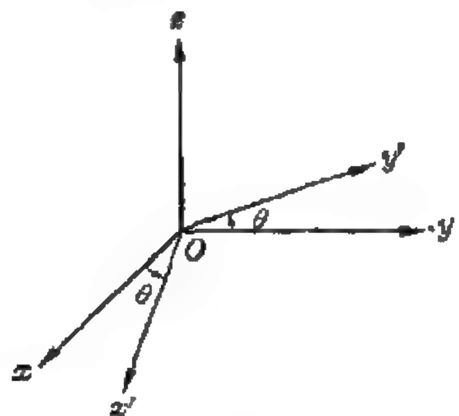


图 5-11

适合平面解析几何的旋转公式. 从而有

定理1 设将坐标轴绕 z 轴转 θ 角, 并设任意点的旧坐标是 (x, y, z), 新坐标是 (x', y', z'), 则有

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,\ z=z'. \quad (1)$$

当坐标轴绕 x 轴或 y 轴旋转时, 也得类似的公式.

【例 4】 利用旋转变换化去曲面 $z=x^2+xy+y^2$ 中的 xy 项.

解: 由平面解析几何可知: 选取适当的旋转角, 利用坐标轴的旋转, 可以化去普遍二次方程的 xy 项. 在此可取 $\theta=45°$, 从而(1)式化为 $x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$, $z=z'$. 于是已知方程化为

$$\begin{aligned} z' &= \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{3}{2}x'^2+\frac{y'^2}{2}, \end{aligned}$$

即

$$3x'^2+y'^2=2z'.$$

【例 5】 化去曲面 $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=a^2$ 中的两个交叉项(指 yz 项、zx 项、xy 项).

解: 首先将已知方程变为 $(x-y)^2-2z(x+y)+z^2=a^2$. 但 $x-y=0$, $z=0$; $x+y=0$, $z=0$ 是 xy 面上的两条互相垂直的直线, 于是就可用此两直线作为新轴, 即由旧轴旋转 $45°$ 而得. 于是(1)式化为

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\quad z=z'.$$

故

$$x-y=-\sqrt{2}\,y',\ x+y=\sqrt{2}\,x',\ z=z'.$$

从而已知方程化为

$$(-\sqrt{2}\,y')^2-2z'(\sqrt{2}\,x')+z'^2=a^2,$$

即 $$2y'^2+z'^2-2\sqrt{2}z'x'=a^2.$$

【例 6】 利用平移及旋转变换，可将

$$ax+by+cz+d=0,\quad a^2+b^2+c^2\neq 0$$

化为 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $z=0$.

解：当 $a=b=0$ 时，已知式化为 $cz+d=0$，此时 $c\neq 0$，利用平移 $x=x'$, $y=y'$, $z=z'-\dfrac{d}{c}$，上式化为 $z'=0$.

当 $b\neq 0$ 时，已知方程可以写作 $ax+b\left(y+\dfrac{d}{b}\right)+cz=0$，利用平移 $x=x'$, $y=y'-\dfrac{d}{b}$, $z=z'$，得 $ax'+by'+cz'=0$. 取直线 $ax'+by'=0$; $z'=0$ 为新 x'' 轴，即取旋转角 θ 适合 $\operatorname{tg}\theta=-\dfrac{a}{b}$，于是 $\dfrac{\sin\theta}{-a}=\dfrac{\cos\theta}{b}=\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}}$, $\varepsilon=\pm 1$. 利用旋转 $x'=x''\cos\theta-y''\sin\theta$, $y'=x''\sin\theta+y''\cos\theta$, $z'=z''$，则 $ax'+by'+cz'=0$ 化成 $\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}y''+cz''=0$ 即 $b'y''+cz''=0$. 但 $b'\neq 0$，再取旋转角 ϕ，适合 $\operatorname{tg}\phi=-\dfrac{b'}{c}$，即

$$\frac{\sin\phi}{-b'}=\frac{\cos\phi}{c}=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{b'^2+c^2}}\quad(\varepsilon=\pm 1).$$

利用旋转

$$x''=x''',\ y''=y'''\cos\phi-z'''\sin\phi,$$
$$z''=y'''\sin\phi+z'''\cos\phi,$$

则 $b'y''+cz''=0$ 化为 $z'''=0$.

当 $a\neq 0$ 时情况相同.

现在研究旋转的一般情况. 设有同原点的两组直角坐标系 $Oxyz$ 和 $Ox'y'z'$ (图 5-12)[注]. 又 x' 轴、y' 轴和 z' 轴关于 $Oxyz$ 的方向角分别是 α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 和 α_3, β_3, γ_3. 于

[注] $Ox'y'z'$ 可以是右手系，也可以是左手系.

是 x 轴、y 轴和 z 轴关于 $Ox'y'z'$ 的方向角分别是 α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3 和 γ_1, γ_2, γ_3. 它们之间的关系可用下表来表示:

	Ox	Oy	Oz
Ox'	α_1	β_1	γ_1
Oy'	α_2	β_2	γ_2
Oz'	α_3	β_3	γ_3

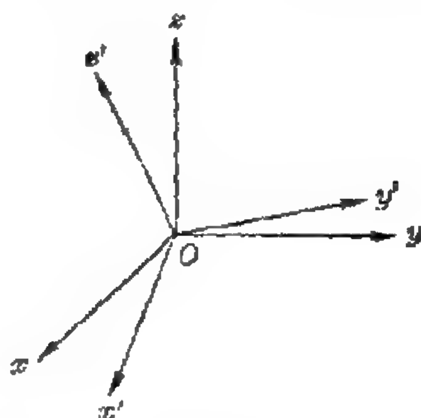


图 5-12

因为 α_i, β_i, $\gamma_i(i=1, 2, 3)$是新轴关于旧坐标系的方向角,而三条新轴是两两垂直的,所以有下面的关系

$$\begin{cases}\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1\\ \cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1\\ \cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1;\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0\\ \cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1=0\\ \cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0.\end{cases} \tag{3}$$

又 α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3; γ_1, γ_2, γ_3 是旧轴关于新坐标系的方向角,而三条旧轴是两两垂直的,所以有下面的关系

$$\begin{cases}\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1\\ \cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=1\\ \cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3=1;\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}\cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cos\gamma_3=0\\ \cos\gamma_1\cos\alpha_1+\cos\gamma_2\cos\alpha_2+\cos\gamma_3\cos\alpha_3=0\\ \cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\beta_3\cos\gamma_3=0.\end{cases} \tag{5}$$

并且(2)及(3)式和(4)及(5)式可以互相推出，这里就不作推导了．由(2)及(3)或(4)及(5)可见在九个方向角中仅有三个是独立的[注]．

以上的关系只不过说明新旧坐标系的三个轴都是两两垂直的，但并没有说明新坐标系也是右手系．为了使得新坐标系也是右手系，就必须再加条件．现在就推求这个条件．用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$ 分别表示两组坐标系的基本向量，于是就有

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{i}\cos\alpha_1+\boldsymbol{j}\cos\beta_1+\boldsymbol{k}\cos\gamma_1\\ \boldsymbol{j}'=\boldsymbol{i}\cos\alpha_2+\boldsymbol{j}\cos\beta_2+\boldsymbol{k}\cos\gamma_2\\ \boldsymbol{k}'=\boldsymbol{i}\cos\alpha_3+\boldsymbol{j}\cos\beta_3+\boldsymbol{k}\cos\gamma_3.\end{cases}\tag{A}$$

因为 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$ 形成右手系的充要条件是 $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')>0$．从另一方面看，$|(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')|$ 表示以 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$ 为棱的平行六面体的体积，由于这个平行六面体是单位立方体，故得 $|(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')|=1$．因此，新系也是右手系的充要条件是

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3\end{vmatrix}=1.\tag{6}$$

当新系是右手系时，就有

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}'\cos\alpha_1+\boldsymbol{j}'\cos\alpha_2+\boldsymbol{k}'\cos\alpha_3\\ \boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}'\cos\beta_1+\boldsymbol{j}'\cos\beta_2+\boldsymbol{k}'\cos\beta_3\\ \boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}'\cos\gamma_1+\boldsymbol{j}'\cos\gamma_2+\boldsymbol{k}'\cos\gamma_3.\end{cases}\tag{B}$$

设空间一点 P 关于这两组坐标系的坐标分别是 (x, y, z) 和 (x', y', z')．于是就有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\quad 和\quad \overrightarrow{OP}=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}'.$$

[注] 欧拉 (Euler) 曾用三个角表示三个独立参数．这三个角叫欧拉角．由于讨论比较复杂，这里就不进行讨论了．

从而得

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}'. \tag{C}$$

将(A)代入(C)，比较两端 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的系数，得

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3 \\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3 \\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{7}$$

将(B)代入(C)，比较两端 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$ 的系数，得

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1 \\ y'=x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2 \\ z'=x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{8}$$

归纳上述，得

定理 2 设 $Oxyz$ 与 $Ox'y'z'$ 为同原点的两组右手直角坐标系．又 Ox'，Oy'，Oz' 关于 $Oxyz$ 的方向角分别是 α_1，β_1，γ_1；α_2，β_2，γ_2 与 α_3，β_3，γ_3，而且空间一点 P 的两组坐标为 (x, y, z) 及 (x', y', z')，则有坐标变换公式(7)及(8)．

定义 方程组(7)及(8)叫做坐标系的旋转公式．

注意 1．旋转时，$\widehat{Ox, Ox'}$；$\widehat{Oy, Oy'}$ 及 $\widehat{Oz, Oz'}$ 三个角不见得相等．

2．(7)及(8)两组公式可以归纳成下面的表，以便记忆．

	x	y	z
x'	$\cos\alpha_1$	$\cos\beta_1$	$\cos\gamma_1$
y'	$\cos\alpha_3$	$\cos\beta_2$	$\cos\gamma_2$
z'	$\cos\alpha_3$	$\cos\beta_3$	$\cos\gamma_3$

【例 7】 已知(6)中

$$\cos\alpha_1=\frac{1}{3},\ \cos\beta_1=-\frac{2}{3},\ \cos\alpha_2=-\frac{2}{3}.$$

又知 $\beta_2>\frac{\pi}{2}$, $\alpha_3<\frac{\pi}{2}$. 试求(7)式并用以化简方程

$$7x^2+5y^2+6z^2+4yz-4zx=0.$$

解：由于 $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1$, 故得 $\cos\alpha_3=\pm\frac{2}{3}$. 但 $\alpha_3<\frac{\pi}{2}$, 故有 $\cos\alpha_3=\frac{2}{3}$. 又由 $\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=1$,

得
$$\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=\frac{5}{9},$$

又
$$\cos\alpha_1\cdot\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cdot\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cdot\cos\beta_3=0,$$

得
$$\cos\beta_3-\cos\beta_2=\frac{1}{3}.$$

解此两方程，得

$$\cos\beta_2=\frac{1}{3},\ \cos\beta_3=\frac{2}{3};\ \cos\beta_2=-\frac{2}{3},\ \cos\beta_3=-\frac{1}{3}.$$

又因
$$\beta_2>\frac{\pi}{2},$$

故有
$$\cos\beta_2=-\frac{2}{3},\quad \cos\beta_3=-\frac{1}{3}.$$

由
$$\cos\beta_1\cdot\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cdot\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cdot\cos\gamma_3=0,$$
$$\cos\gamma_1\cdot\cos\alpha_1+\cos\gamma_2\cdot\cos\alpha_2+\cos\gamma_3\cdot\cos\alpha_3=0,$$

得
$$\cos\gamma_1-2\cos\gamma_2+2\cos\gamma_3=0,$$
$$2\cos\gamma_1+2\cos\gamma_2+\cos\gamma_3=0.$$

解之，得
$$\frac{\cos\gamma_1}{-2}=\frac{\cos\gamma_2}{1}=\frac{\cos\gamma_3}{2}=k.$$

但
$$\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3=1,$$

故有
$$4k^2+4k^2+k^2=1,$$

即
$$k=\frac{\varepsilon}{3},\quad \varepsilon=\pm1.$$

所以
$$\cos\gamma_1=-\frac{2\varepsilon}{3},\quad \cos\gamma_2=\frac{\varepsilon}{3},\quad \cos\gamma_3=\frac{2\varepsilon}{3}.$$

因新系也是右手系，由(6)得

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2\varepsilon}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{\varepsilon}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2\varepsilon}{3} \end{vmatrix} = 1.$$

所以 $\varepsilon = -1$，故(7)式化为

$$x = \frac{1}{3}(x' - 2y' + 2z'), \quad y = \frac{-1}{3}(2x' + 2y' + z'),$$

$$z = \frac{1}{3}(2x' - y' - 2z').$$

将此变换代入已知曲面方程中，得

$$x'^2 + 2y'^2 + 3z'^2 = 0.$$

【例 8】 设 λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2; λ_3, μ_3, ν_3 为新右手直角坐标系中三个坐标轴的方向余弦. 求证

$$\lambda_1 = \mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2, \quad \mu_1 = \nu_2\lambda_3 - \nu_3\lambda_2, \quad \nu_1 = \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2;$$

$$\lambda_2 = \mu_3\nu_1 - \mu_1\nu_3, \quad \mu_2 = \nu_3\lambda_1 - \nu_1\lambda_3, \quad \nu_2 = \lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3;$$

$$\lambda_3 = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1, \quad \mu_3 = \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1, \quad \nu_3 = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1.$$

【证】 由公式(3)中的后两式得

$$\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0, \quad \lambda_1\lambda_3 + \mu_1\mu_3 + \nu_1\nu_3 = 0.$$

将此两个方程看作是以 λ_1, μ_1, ν_1 为未知数的三元齐次方程组，解之，得

$$\frac{\lambda_1}{\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2} = \frac{\mu_1}{\nu_2\lambda_3 - \nu_3\lambda_2} = \frac{\nu_1}{\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2} = k.$$

所以 $\lambda_1 = k(\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2), \quad \mu_1 = k(\nu_2\lambda_3 - \nu_3\lambda_2),$

$$\nu_1 = k(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2).$$

再将此三式分别乘以 λ_1, μ_1, ν_1，然后相加，得

$$\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=k[\lambda_1(\mu_2\nu_3-\mu_3\nu_2)$$
$$+\mu_1(\nu_2\lambda_3-\nu_3\lambda_2)+\nu_1(\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2)]$$
$$=k\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2\\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3\end{vmatrix}.$$

由于新系是右手系，由(6)，得 $k=1$，故有

$$\lambda_1=\mu_2\nu_3-\mu_3\nu_2,\quad \mu_1=\nu_2\lambda_3-\nu_3\lambda_2,\quad \nu_1=\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2.$$

同理可以推出其它两组等式.】

【例 9】 求证例 3 中的

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

和 $(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(y_2-y_1)(y_4-y_3)+(z_2-z_1)(z_4-z_3)$

也是转轴下的不变式.

【证】 将新轴的方向余弦写成 $\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1;\ \lambda_2,\ \mu_2,\ \nu_2;\ \lambda_3,\ \mu_3,\ \nu_3$. 利用旋转 $P_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$ 变成 $P_i'(x_i',\ y_i',\ z_i')$，则由(7)，可得

$$x_2-x_1=(x_2'-x_1')\lambda_1+(y_2'-y_1')\lambda_2+(z_2'-z_1')\lambda_3;$$
$$y_2-y_1=(x_2'-x_1')\mu_1+(y_2'-y_1')\mu_2+(z_2'-z_1')\mu_3;$$
$$z_2-z_1=(x_2'-x_1')\nu_1+(y_2'-y_1')\nu_2+(z_2'-z_1')\nu_3.$$

将此三式平方相加，再利用(2)及(3)，即得

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2}.$$

又由 $x_4-x_3=(x_4'-x_3')\lambda_1+(y_4'-y_3')\lambda_2+(z_4'-z_3')\lambda_3;$

$$y_4-y_3=(x_4'-x_3')\mu_1+(y_4'-y_3')\mu_2+(z_4'-z_3')\mu_3;$$
$$z_4-z_3=(x_4'-x_3')\nu_1+(y_4'-y_3')\nu_2+(z_4'-z_3')\nu_3,$$

再利用(2)及(3)，即得

$$(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(y_2-y_1)(y_4-y_3)+(z_2-z_1)(z_4-z_3)$$
$$=(x_2'-x_1')(x_4'-x_3')+(y_2'-y_1')(y_4'-y_3')$$
$$+(z_2'-z_1')(z_4'-z_3').$$]

*4·3 一般的坐标变换与点变换

将前面的两种坐标变换结合起来，就得到一般的坐标变换. 先设坐标系 $\bar{O}xyz$，经平移

$$x=\bar{x}+a,\quad y=\bar{y}+b,\quad z=\bar{z}+c, \tag{A}$$

得到坐标系 $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$，其中 (a, b, c) 是新原点 $\bar{O}$ 关于坐标系 $Oxyz$ 的坐标. 再设坐标系 $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 经旋转

$$\begin{cases}\bar{x}=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3\\ \bar{y}=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3\\ \bar{z}=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3,\end{cases} \tag{B}$$

得到另一坐标系 $\bar{O}x'y'z'$，其中 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ 分别是 $\bar{O}x'$, $\bar{O}y'$, $\bar{O}z'$ 关于 $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$（也就是关于 $Oxyz$）的方向角.

将(B)代入(A)，就得到

$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3+a\\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3+b\\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3+c,\end{cases} \tag{9}$$

另一方面，利用(8)，则(B)变为

$$\begin{cases}x'=\bar{x}\cos\alpha_1+\bar{y}\cos\beta_1+\bar{z}\cos\gamma_1\\ y'=\bar{x}\cos\alpha_2+\bar{y}\cos\beta_2+\bar{z}\cos\gamma_2\\ z'=\bar{x}\cos\alpha_3+\bar{y}\cos\beta_3+\bar{z}\cos\gamma_3,\end{cases} \tag{C}$$

将(A)中的 $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ 代入(C)，得

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1+a'\\ y'=x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2+b'\\ z'=x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3+c',\end{cases} \tag{10}$$

其中

$$a'=-(a\cos\alpha_1+b\cos\beta_1+c\cos\gamma_1),$$
$$b'=-(a\cos\alpha_2+b\cos\beta_2+c\cos\gamma_2),$$
$$c'=-(a\cos\alpha_3+b\cos\beta_3+c\cos\gamma_3).$$

我们必须理解，坐标变换指的是同一点关于新、旧坐标系的坐标间的变换公式。公式(9)和(10)就是在新、旧坐标系里一点 P 的旧坐标 (x, y, z) 和新坐标 (x', y', z') 间的一般的变换公式。

现在研究公式(9)的另一种几何解释。设想 P 点固定于旧坐标系内，也就是说把 P 点与坐标轴 Ox, Oy 和 Oz 看作是一个整体。在这种假设之下，把坐标轴 Ox, Oy, Oz 搬到新位置 $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$；这时 P 点就被搬到它的新位置 P' 点(图5-13)。设 P 和 P' 关于 $Oxyz$ 的坐标分别是 (x, y, z) 和 (x', y', z')。由于 P' 与 $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ 的相对位置正如 P 与 Ox, Oy, Oz 的相对位置一样，因而 P' 关于 $O'x'y'z'$ 的坐标正是 (x, y, z)。这时在公式(9)内，(x, y, z) 应看作是 P' 的新坐标(即关于 $O'x'y'z'$ 的坐标)，而 (x', y', z') 反看成是 P' 的旧坐标(即关于 $Oxyz$ 的坐标)。因此，在公式(9)里将 (x, y, z) 与 (x', y', z') 互换就得到：

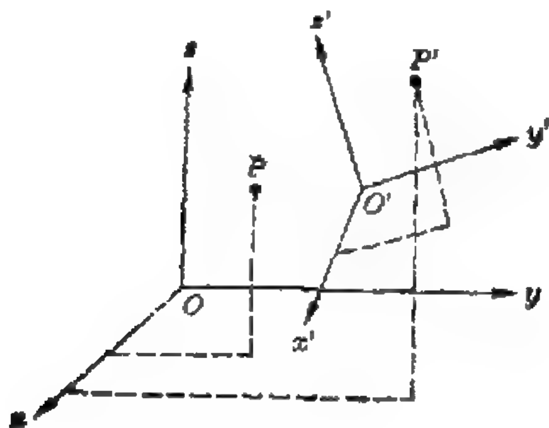


图 5-13

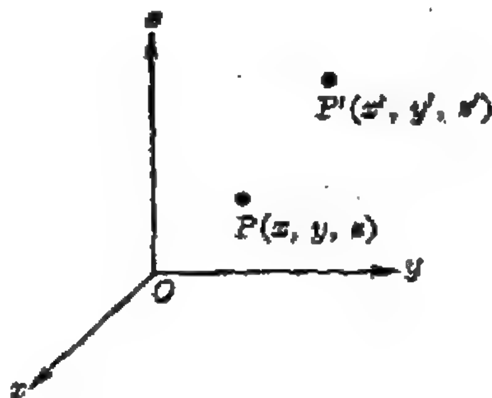


图 5-14

定理3 一点 $P(x, y, z)$ 移至 $P'(x', y', z')$，则有

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 + a \\ y' = x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3 + b \\ z' = x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3 + c. \end{cases} \tag{11}$$

定理3可用图5-14来说明。

定义 公式(10)称为点变换公式。

习 题 5·4

1. 已知两点 $P_1(a_1, b_1, c_1)$ 和 $P_2(a_2, b_2, c_2)$，如以 P_1P_2 的中点为新

原点，作坐标系的平移，求 P_1 和 P_2 在新系下的坐标.

2. 以 (a, b, c) 为新原点，作坐标系的平移，求下列方程在新系下的方程：

(1) $ax+by+cz=a^2+b^2+c^2$;

(2) $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$;

(3) $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

3. 化去曲面 $3x^2-8xy-3y^2-5z^2+5=0$ 中的交叉项(即 xy 项).

4. 求证可以化去曲面 $yz+zx+xy=a^2$ 中的两个交叉项.

5. 证明三直线

$$x=\frac{y}{4}=\frac{z}{2},\quad \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=z,\quad \frac{x}{2}=y=\frac{z}{-3}$$

两两直交. 今以此三直线分别为新右手坐标系 $Ox'y'z'$ 的 x' 轴、y' 轴和 z' 轴. 求坐标变换公式.

6. 证明三平面

$$x+4y+2z=0,\quad 2x-y+z=0,\quad 2x+y-3z=0$$

两两直交. 今以此三平面分别为新右手坐标系 $Ox'y'z'$ 的 $y'z'$ 面、$z'x'$ 面和 $x'y'$ 面. 求坐标变换公式.

7. 证明三平面

$$x+4y+2z=7,\quad 2x-y+z=2,\quad 2x+y-3z=0$$

两两直交于 $(1, 1, 1)$. 今以 $(1, 1, 1)$ 为新原点，先作平移再作旋转，使新右手坐标系的三坐标面分别与已知三平面平行，求坐标变换公式.

8. 设 $x=-\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}$，求$z$，使之成为一组右手系的转轴公式.

9. 用上题求下列方程在新系下的方程：

(1) $x+y+z=0$; (2) $x=y=z$; (3) $(x+y+z)^2=2(x^2+y^2+z^2)$.

10. 空间内有 n 个点 $P_r(x_r, y_r, z_r)$ $(r=1, 2, \cdots, n)$ 经坐标变换后得到 $P_r(x'_r, y'_r, z'_r)$. 求证

$$\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{r=1}^{n}x_r\right),\ \frac{1}{n}\left(\sum_{r=1}^{n}y_r\right),\ \frac{1}{n}\left(\sum_{r=1}^{n}z_r\right)\right)$$

是不变的，并说明它的几何意义。

*11. 设 λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2; λ_3, μ_3, ν_3 是新坐标系的坐标轴的方向余弦. 如果新系是右手系，求证

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2-1 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3-1 \end{vmatrix}=0.$$

[提示：用例 8.]

*12. 同上，且 $\frac{a}{\lambda_1}+\frac{b}{\mu_1}+\frac{c}{\nu_1}=0$, $\frac{a}{\lambda_2}+\frac{b}{\mu_2}+\frac{c}{\nu_2}=0$.

求证：

(1) $\frac{a}{\lambda_3}+\frac{b}{\mu_3}+\frac{c}{\nu_3}=0$; (2) $a:b:c=\lambda_1\lambda_2\lambda_3:\mu_1\mu_2\mu_3:\nu_1\nu_2\nu_3$.

第五节 曲面和空间曲线的分类

5·1 曲面的分类

在解析几何里，曲面是由方程表示的，因此根据曲面方程的性质而将曲面进行分类是很自然的.

定义 如果曲面的方程是代数方程（也就是可以化为变数是 x, y, z 的多项式等于零的等式），那么这个曲面就叫做**代数曲面**，方程的次数叫做代数曲面的**次数**. 非代数曲面叫做**超越曲面**.

于是代数曲面的方程可以写作

$$F(x, y, z)\equiv\sum A_{pqr}x^py^qz^r=0. \tag{1}$$

其中 p, q, r 是正整数或零；且 A_{pqr} 至少有一个非零. $p+q+r$ 的最大值就是它的次数，n 次代数曲面简称 **n 次曲面**. 一次曲面方程的普遍式是

$$ax+by+cz+d=0, \quad a^2+b^2+c^2\neq0.$$

它就是第三章所介绍的平面. 二次曲面方程的普遍式是

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$$
$$+2ux+2vy+2wz+d=0,$$
$$a^2+b^2+c^2+f^2+g^2+h^2\neq 0.$$

这将在第八章里进行研究. 至于最一般的代数曲面要在比较高深的代数几何里才能研究.

注意 上面的曲面分类法，对于平面解析几何里的曲线分类法也完全适用.

同一个曲面因为所选的坐标系不同，可以用很多个不同的方程来表示,为了将曲面分类,必须证明

定理1 在一个直角坐标系中，一个曲面若是 n 次曲面，则在其它任意直角坐标系中,它也必是 n 次曲面.

【证】 由上节公式(9)知一般的坐标变换为:

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3+a \\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3+b \\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3+c. \end{cases} \qquad (*)$$

因(1)式中的每一项是一个单项式，也就是说:每项是某整系数和变数 x, y, z 的正整次幂的乘积. 将(*)代入(1)式后去掉所有括弧，便得到一个方程. 它的左边是由若干个 x', y', z' 所组成的若干个新的单项式的和. 故作这样的变换后，方程的代数性质并不改变.

其次,再证明方程的次数也是保持不变的. 因为(*)是关于 x'、y' 和 z' 的一次式，所以将(*)代入(1)式后所得到的新变数 x'、y'、z' 的单项式的次数不可能高于 n 次. 那么，有没有在变换中互相抵消而降低次数的可能呢? 假定从一个直角坐标系 $Oxyz$ 变为另一个直角坐标系 $O'x'y'z'$ 时,某一个代数方程的次数可以降低,那么当用相反的变换变回去时(也就是在(*)中用 x', y', z' 表示 x, y, z 的变换)，它的次数就必然升

高. 但由上述已经知道, 这是不可能的. 因此定理得以证明. ▌

【例 1】 求证 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 是代数曲面, 且求它的次数.

【证及解】 将已知方程移项, 得

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{z},$$

平方化简, 得

$$x+y-z-a=-2(\sqrt{xy}+\sqrt{az}),$$

再平方化简, 得

$$(x+y-z-a)^2=4(xy+az+2\sqrt{axyz}).$$

去括弧化简, 再次平方, 则得

$$[x^2+y^2+z^2-2(yz+zx+xy)-2a(x+y+z)+a^2]^2$$
$$=64axyz.$$

这表示一个四次代数曲面.

关于代数曲面的次数有以下的定理:

定理 2 n 次曲面的平截线必是代数曲线, 且它的次数不高于 n.

【证】 由上一节的例 6 知: 任意平面经过坐标变换后可以得到 $z=0$. 又由于 n 次曲面方程可以写作 $F(x, y, z)=0$, 其中 $F(x, y, z)$ 是 n 次多项式. 将 $z=0$ 代入 $F(x, y, z)=0$ 中, 得到平面曲线 $F(x, y, 0)=0$, $z=0$. 这个平面曲线必是代数曲线, 且它的次数不高于 n[注]. ▌

定理 3 n 次曲面和任意直线交点的个数不多于 n.

【证】 通过这条直线作一平面, 根据定理 2, 它和 n 次曲面所成的平截线的次数不超过 n. 曲面与这条直线的交点就是

[注] 例如二次曲面 $z^2=x+y$ 与 $z=0$ 的交线是直线 $x+y=0$, $z=0$. 它是一次曲线.

平截线与这条直线的交点．但是次数不超过 n 的平面曲线和一条直线的交点的数目是不超过 n 的，于是定理得以证明．】

5·2 空间曲线的分类

利用曲面的分类就可以将空间曲线进行分类．两个曲面都是代数曲面，则它们所产生的空间曲线叫做空间代数曲线，否则，叫做空间超越曲线．一条空间代数曲线与一个平面的交点的个数（包括实的和虚的[注]）叫做它的次数．n 次空间代数曲线简称为 n 次空间曲线．两个平面如相交，则产生一条空间直线，由于直线与平面的交点仅有一个，故空间直线是一次空间曲线．

同一条空间代数曲线由于所选的平面不同，则它们的交点的个数有没有可能不同？下述定理回答了这一问题．

定理 4 一条空间代数曲线与任意平面的交点（包括实的和虚的）的个数都是相同的．

【证】 设一条空间代数曲线是 p 次曲面 $F(x, y, z)=0$ 及 q 次曲面 $G(x, y, z)=0$ 的交线．于是它与平面

$$ax+by+cz+d=0 \quad 或 \quad a'x+b'y+c'z+d=0$$

的交点的个数都是 pq，因此曲线的次数就是 pq．】

【例 2】 求证 $x=\cos t, y=\sin t, z=\operatorname{tg} t$ $(0<t\leqslant 2\pi)$ 是代数曲线，并求它的次数．

【证及解】 由前两个方程中消去 t，得 $x^2+y^2=1$，再将前两个方程代入第三个方程中，得到 $z=\dfrac{y}{x}$．故已知曲线是两个代数曲面 $x^2+y^2=1$ 与 $y=zx$ 的交线，即是代数曲线．下面推求它的次数．

[注] 三个坐标都是实数的点叫做实点，至少有一个是复数的点叫虚点。

作参数变换 $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=u$, 则有

$$\sin t=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ \operatorname{tg} t=\frac{2u}{1-u^2}.$$

于是已知曲线方程可以写作

$$x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad y=\frac{2u}{1+u^2},\quad z=\frac{2u}{1-u^2}.$$

设有平面 $ax+by+cz+d=0$, 为了求它与这条曲线的交点的个数,将曲线方程代入平面方程中,得到

$$\frac{1}{1+u^2}[a(1-u^2)+2bu]+\frac{2cu}{1-u^2}+d=0,$$

即 $[a(1-u^2)+2bu](1-u^2)+2cu(1+u^2)+d(1-u^4)=0,$

这是 u 的四次方程,故交点个数是 4, 即这条代数曲线是四次曲线.

习 题 5·5

1. 判断 (1)$x^2+y^2-z^2=0$; (2)$z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ 是不是代数曲面? 如果是,求它们的次数.
2. 判断 $\sin z=x+y$ 是哪一类曲面? 并求它与 z 轴的交点.
3. 求证 (1) $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$; (2) $x=t^2,\ y=t^3,\ z=t^4$ 是空间代数曲线, 并求它们的次数.
4. 求证 $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t$ 是空间超越曲线.

*5. 求证 $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 为代数曲面, 并求其次数, 且研究它的形状.

本 章 提 要

1. 空间图形 利用图形的几何特征引出轨迹问题. 一般地,根据动点适合一个条件或两个条件而分别得到曲面或空间曲线的方程. 然后就方程讨论它们的形状.

(1) 曲面 分两类, 即代数曲面和超越曲面. 它的方程有坐标形

式的普遍方程（一个方程）以及坐标形式和向量形式的参数方程（两个参数）.

(2) 空间曲线　分两类，即空间代数曲线和超越曲线. 它的方程有坐标形式的普遍方程（两个方程）以及坐标形式和向量形式的参数方程（一个参数）.

2. 空间坐标变换　有平移及旋转两种，用以简化方程.

复 习 题 五

1. 求证经过空间坐标变换，可以使 $x+y+z=0$ 变为新的 xy 面.
2. 求证 $x=y=z$; $2x=-y=2z$; $x=-z$, $y=0$ 可以作为一组新右手坐标系的三条轴. 并求 $P(1, 2, 3)$在新系下的坐标.
3. 求证经过坐标变换可以化去 $z=x^2+xy+y^2$ 的交叉项.
4. 在平面 $y=kx$ 上有一条曲线 $x=f(t)$, $z=\phi(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$. 今以 $y=kx$ $(k=\operatorname{tg}\theta)$为新的 zx 平面，作坐标轴的旋转，求该曲线的方程.
5. 求证 $\sqrt{y-z}+\sqrt{z-x}+\sqrt{x-y}=1$ 是代数曲面，且求其次数.

*6. 求证 $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$ 是代数曲面，并研究它的形状.

7. 已知 n 个定点 P_r $(r=1, 2\cdots, n)$. P 为动点，如果$\sum\limits_{r=1}^{n}|PP_r|^2=k^2$, k 为常数，求 P 的轨迹方程.
8. 求证到两个异面直线的距离之和为常数的点的轨迹是一个四次曲面.

*9. 设有定点 O 及不过 O 点的 n 个定平面. 过 O 点作直线与此 n 个平面分别交于 P_1, P_2, $\cdots$, P_n. 在此直线上取 Q 点，使 $\dfrac{n}{OQ}=\dfrac{1}{OP_1}+\cdots+\dfrac{1}{OP_n}$. 求证 Q 的轨迹是一个平面.

*10. 已知两个定平面 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 和 $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, 作与定方向平行的直线. 求证位于两个平面之间的线段的中点的轨迹是一个平面.

[提示：设轨迹上的动点是(x, y, z)，定方向的方向系数是 l, m,

n; 动直线是 $\dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n}$.]

11. 求证

$$\lambda_1=\frac{1+a^2-b^2-c^2}{1+a^2+b^2+c^2},\quad \mu_1=\frac{2(ab+c)}{1+a^2+b^2+c^2},\quad \nu_1=\frac{2(ac-b)}{1+a^2+b^2+c^2};$$

$$\lambda_2=\frac{2(ab-c)}{1+a^2+b^2+c^2},\quad \mu_2=\frac{1-a^2+b^2-c^2}{1+a^2+b^2+c^2},\quad \nu_2=\frac{2(bc+a)}{1+a^2+b^2+c^2};$$

$$\lambda_3=\frac{2(ac+b)}{1+a^2+b^2+c^2},\quad \mu_3=\frac{2(bc-a)}{1+a^2+b^2+c^2},\quad \nu_3=\frac{1-a^2-b^2+c^2}{1+a^2+b^2+c^2}$$

形成一组两两垂直的三条射线的方向余弦[罗德里克(Rodrigues)公式].

12. 设 $p^2+q^2+r^2=1$, 求证

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta+(ry-qz)\sin\theta+p(1-\cos\theta)(px+qy+rz), \\ y'=x\cos\theta+(pz-rx)\sin\theta+q(1-\cos\theta)(px+qy+rz), \\ z'=x\cos\theta+(qx-py)\sin\theta+r(1-\cos\theta)(px+qy+rz) \end{cases}$$

是一组转轴公式[欧拉(Euler)公式].

思 考 题 五

1. 三个单位向量两两垂直，称为一个标准化正交向量组. 试确定一个仅含一个参数的标准化正交右手向量组.

2. 设 $m_r^0=\{\lambda_r,\ \mu_r,\ \nu_r\}\ (r=1,\ 2,\ 3)$, 是一个标准化正交右手向量组，求证

$$\lambda_1^2\mu_1^2\nu_1^2+\lambda_2^2\mu_2^2\nu_2^2+\lambda_3^2\mu_3^2\nu_3^2=\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2+\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2+\nu_1^2\nu_2^2\nu_3^2$$

[雅可比(Jacobi)关系式].

第六章

特殊曲面

空间解析几何所研究的曲面，主要是二次曲面，但是也可以研究一些非二次的特殊曲面．前面已经看到：利用动点适合某些几何特征即可建立曲面的方程，从而对曲面进行研究．本章将利用直线或曲线适合某些几何特征来建立一些曲面的方程．主要讨论由直线产生的柱面和锥面、曲线产生的旋转曲面这三大类．

第一节 球　面

1·1 球面的方程

定义 与一定点的距离是定长的空间点的轨迹叫做球面，此定点叫球心，定长叫半径．

定理1 以 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心，r 为半径的球面方程的向量形式是

$$|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|=r. \qquad (1)$$

坐标形式是

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2. \qquad (2)$$

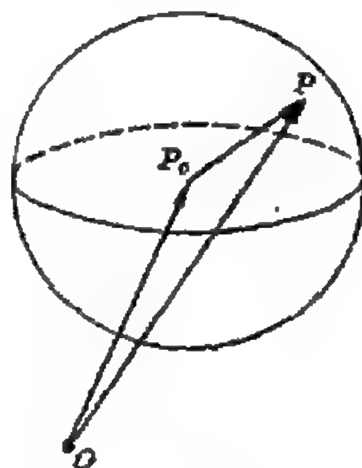


图 6-1

【证】 设 P 是球面上的一动点，则 $\overrightarrow{P_0P}=|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|$，由假设 $|\overrightarrow{P_0P}|=r$，即得(1)．

设 $\boldsymbol{P}=\{x, y, z\}$，$\boldsymbol{P}_0=\{x_0, y_0, z_0\}$，由(1)即得(2)式(见

图 6-1). 】

定理 2 三元二次普遍方程

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$$
$$+2ux+2vy+2wz+d=0 \tag{3}$$

表示一个球面的充要条件是

$$a=b=c\neq 0,\ f=g=h=0,\ u^2+v^2+w^2-ad>0. \tag{4}$$

【证】 1. 必要条件 如果(3)表示一个球面，则一定可以写成(2)式的形式. 将(2)展开得

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2=0. \tag{2'}$$

将(3)与(2′)的对应项加以比较，即得

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}=\frac{f}{0}=\frac{g}{0}=\frac{h}{0}$$
$$=\frac{u}{-x_0}=\frac{v}{-y_0}=\frac{w}{-z_0}=\frac{d}{x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2}\quad(=\lambda\neq 0).$$

所以 $a=b=c=\lambda$, $f=g=h=0$, $u=-x_0\lambda$, $v=-y_0\lambda$, $w=-z_0\lambda$, $d=(x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2)\lambda$. 将最后一式两端乘以 λ，即得

$$d\lambda=(x_0\lambda)^2+(y_0\lambda)^2+(z_0\lambda)^2-r^2\lambda^2,$$

又 $a=\lambda$，故有

$$ad=u^2+v^2+w^2-a^2r^2,$$

所以
$$u^2+v^2+w^2-ad=a^2r^2>0.$$

2. 充分条件 设 $a=b=c\neq 0$, $f=g=h=0$，则(3)可以写作

$$a(x^2+y^2+z^2)+2ux+2vy+2wz+d=0.$$

配方，得

$$\left(x+\frac{u}{a}\right)^2+\left(y+\frac{v}{a}\right)^2+\left(z+\frac{w}{a}\right)^2$$
$$=\frac{1}{a^2}(u^2+v^2+w^2-ad).$$

由假设 $u^2+v^2+w^2-ad>0$，可设 $u^2+v^2+w^2-ad=a^2r^2$. 故

(3) 化成 $\left(x+\frac{u}{a}\right)^2+\left(y+\frac{v}{a}\right)^2+\left(z+\frac{w}{a}\right)^2=r^2$.

这表示一个球面. 球心是 $\left(-\frac{u}{a},\ -\frac{v}{a},\ -\frac{w}{a}\right)$，半径是 $\frac{1}{a}\sqrt{u^2+v^2+w^2-ad}$. 】

注意 当 $u^2+v^2+w^2-ad=0$ 时，则(3)表示一点 $\left(-\frac{u}{a},-\frac{v}{a},-\frac{w}{a}\right)$，当 $u^2+v^2+w^2-ad<0$ 时，则(3)没有实轨迹.

又(2′)通常写成

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0. \tag{5}$$

(5)式中含有四个独立参数，故得**四条件确定一球面**. (1)式叫做向量形式的球面方程的**普遍式**；(2)或(5)式叫做坐标形式的球面方程的**普遍式**.

定理 3 已知四个不共面的点 $P_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 求证过此四点的球面方程是

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{6}$$

【证】 设(5)式为所求，因过 $P_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$，故有

$$x_i^2+y_i^2+z_i^2+2ux_i+2vy_i+2wz_i+d=0. \tag{A$_i$}$$

将(5)式及(A_i)式看作是以 $u,\ v,\ w,\ d$ 为未知数的五个方程，它们有解的充要条件是(6)式，即所求的方程(见附录第三节). 在(6)中按第一行展开(见附录第一节)，$x^2+y^2+z^2$ 的代数余子式是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

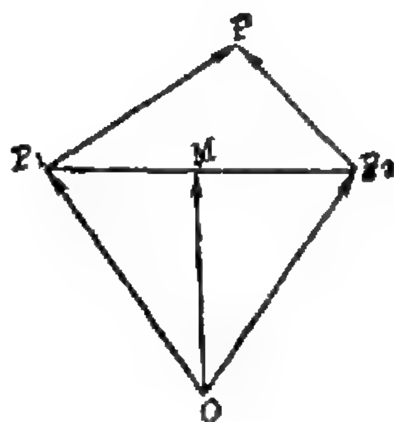


图 8-2

由于四个点不共面，故此行列式不是零(§ 3.2(5))，因此(6)式展开后，即可写成(5)的形式，从而知是一球面． ▌

【例 1】 求以二定点构成的线段为直径的球面方程．

解：设二定点是 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，又 P_1P_2 的中点 M 是 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$，$\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1$，$\overrightarrow{P_1M}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)$．由(1)得所求的球面方程的向量形式是

$$|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{M}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1|.$$

化成坐标形式是

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2].$$

化简得

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0.$$

注意 设 P 是球面上的一动点，则 $PP_1 \perp PP_2$，即 $\overrightarrow{P_1P}\cdot\overrightarrow{P_2P}=0$，故有 $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2)=0$．此方程即为所求的球面方程．

下面推求以原点为中心，r 为半径的球面的参数方程．

由球面上的一点 $P(x, y, z)$ 作 PN 与 xy 面相垂直，再作 NA，NB 分别与 x 轴和 y 轴垂直(图 6-3)．设 $\angle AON=\theta$，$\angle NOP=\phi$，则 $x=OA=ON\cos\theta$，

$y=OB=ON\sin\theta$.

又 $z=NP=OP\sin\phi$，

$ON=OP\cos\phi$.

但 $OP=r$，

故得坐标形式的球面参数方程为

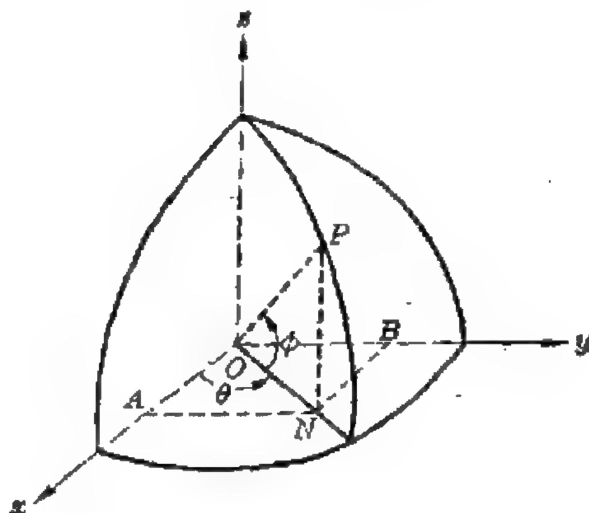


图 6-3

$$x=r\cos\phi\cos\theta,\ y=r\cos\phi\sin\theta,\ z=r\sin\phi. \quad (7)$$

当 $-\pi<\theta\leqslant 0$ 时，P 点在 zx 面左侧；当 $0<\theta\leqslant\pi$ 时，P 点在 zx 面右侧；当 $0<\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，P 点在 xy 面上侧；当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\phi\leqslant 0$ 时，P 点在 xy 面下侧．把 $\theta\ (-\pi<\theta\leqslant\pi)$ 和 $\phi\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 分别叫做经度和纬度，这与第五章第二节例 6 的结果相符合．这样，球面上的点 $P(x, y, z)$ 除了 $(0, 0, \pm r)$ 外，与 θ, ϕ 之间建立了一一对应的关系．(7) 也可以写成向量形式：

$$\boldsymbol{P}=r(\cos\phi\cdot\cos\theta\boldsymbol{i}+\cos\phi\cdot\sin\theta\boldsymbol{j}+\sin\phi\boldsymbol{k}). \quad (8)$$

由于 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 可以作为平面内单位圆上一点的坐标，故 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta$

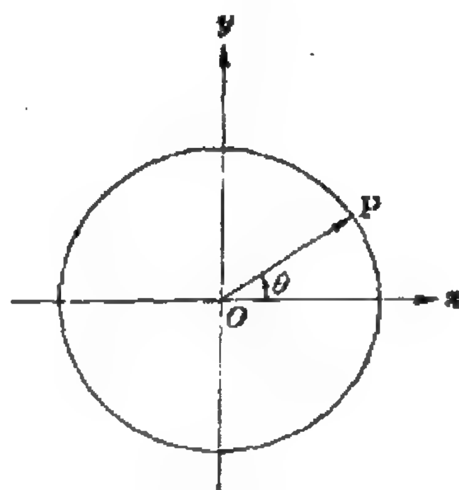


图 6-4

常以 $\boldsymbol{e}(\theta)$ 来表示(图 6-4). 于是(8)可以写作

$$\boldsymbol{P}=r[\cos\phi\,\boldsymbol{e}(\theta)+\boldsymbol{k}\sin\phi]. \tag{9}$$

经过平移,以 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心, r 为半径的球面的坐标形式的参数方程是

$$\begin{gathered}x=x_0+r\cos\phi\cos\theta,\ y=y_0+r\cos\phi\sin\theta,\\ z=z_0+r\sin\phi.\end{gathered} \tag{10}$$

向量形式是

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+r[\cos\phi\,\boldsymbol{e}(\theta)+\boldsymbol{k}\sin\phi]. \tag{11}$$

【例2】 求证空间曲线

$$x=\frac{t}{1+t^2+t^4},\quad y=\frac{t^2}{1+t^2+t^4},$$

$$z=\frac{t^3}{1+t^2+t^4}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

是一球面曲线,且求它所在的球面方程.

【证及解】 不论 t 值如何,都有

$$x^2+y^2+z^2=\frac{t^2(1+t^2+t^4)}{(1+t^2+t^4)^2}=\frac{t^2}{1+t^2+t^4}=y,$$

故已知空间曲线在球面 $x^2+y^2+z^2=y$ 上,因而它是一条球面曲线.

*1·2 球坐标系

现在介绍其它学科常用的一种空间坐标系——**球坐标系**,也叫**空间极坐标系**.

已知空间直角坐标系,又知任一点 $P(x, y, z)$,它在 xy 面上的射影是 N. 又 N 在 x 轴及 y 轴上的射影分别是 A 及 B(见图 6-5). 设 $\angle AON=\theta$, $\angle NOP=\phi$, $OP=r$, 由图可知

$$x=r\cos\phi\cos\theta,\ y=r\cos\phi\sin\theta,\ z=r\sin\phi, \tag{12}$$

其中 $0\leqslant r<+\infty$, $-\pi<\theta\leqslant\pi$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

这里(r, θ, ϕ)叫做 P 点的球坐标或空间极坐标.

由(12)即得

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\phi=\arcsin\frac{z}{r}$$

$$=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\theta=\begin{cases}\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y\geqslant 0,\\ -\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y<0.\end{cases} \tag{13}$$

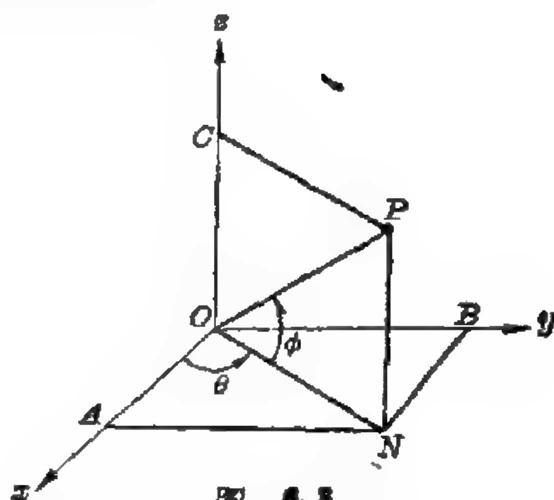


图 6-3

于是当一点的球坐标已知时，由(12)即可知它的直角坐标；反之，当一点的直角坐标已知时，由(13)即可知它的球坐标. 但 z 轴上点的球坐标不唯一确定 (12) 及 (13) 是直角坐标与球坐标的坐标变换公式.

1·3 点与球面的关系

设有以 $P_0(x_0, y_0, z_0)$为球心，r 为半径的一个球面 K，$P(x, y, z)$是任意一点. 于是 P 在 K 的外部、内部和球面上的充要条件分别是

$$|\overrightarrow{P_0P}|>r,\quad |\overrightarrow{P_0P}|<r \quad 和 \quad |\overrightarrow{P_0P}|=r.$$

从而有

定理 4 点 $P(x, y, z)$在以 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心、r 为半径的球面的外部、内部和球面上的充要条件分别是

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2>r^2, \tag{14}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2, \tag{15}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2. \tag{16}$$

1·4 直线与球面的关系

现在我们讨论过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向余弦是 λ, μ, ν

的直线

$$x=x_0+t\lambda,\quad y=y_0+t\mu,\quad z=z_0+t\nu \tag{17}$$

和球面(5)的位置关系：

将(17)代入(5)并化简，得到 t 的二次方程

$$t^2+2Rt+S=0. \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned} R&=\lambda(x_0+u)+\mu(y_0+v)+\gamma(z_0+w),\\ S&=x_0^2+y_0^2+z_0^2+2ux_0+2vy_0+2wz_0+d. \end{aligned} \tag{19}$$

方程(18)中 t 的值是(17)和(5)的交点与 P_0 点所构成的有向线段的大小. 当(17)和(5)的两个交点不重合时，直线(17)叫做球面的割线；当(17)和(5)的两个交点重合时，直线(17)叫做球面的切线；当(17)和(5)没有交点时，直线(17)叫做球面的离线.

定理 5 直线(17)是球面(5)的割线、切线和离线的充要条件分别是

$$R^2-S>0, \tag{20}$$

$$R^2-S=0, \tag{21}$$

和

$$R^2-S<0. \tag{22}$$

【例 3】 由 $A(a,\ b,\ c)$ 到球面(2)作切线，切点是 T，则切线长 $|AT|=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2+(c-z_0)^2-r^2}$.

【证】 由勾股定理得

$$|AT|=\sqrt{|AP_0|^2-r^2},$$

即 $$|AT|=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2+(c-z_0)^2-r^2}.$$

但 A 必须在球外才能作切线，由(14)可知

$$(a-x_0)^2+(b-y_0)^2+(c-z_0)^2-r^2>0,$$

故切线长为实数. 】

【例 4】 求与三个坐标轴都相切的球面的球心的轨迹.

解：设(5)为所求．由于它和 x 轴相切，得 $y=0$，$z=0$，代入(5)中，得

$$x^2+2ux+d=0.$$

此方程必有等根，即 $u^2-d=0$．同理，有 $v^2-d=0$，$w^2-d=0$．取 $d=\lambda^2$，则 $u=\pm\lambda$，$v=\pm\lambda$，$w=\pm\lambda$．因此与三轴都相切的球面方程可以写作

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda(\pm x\pm y\pm z)+\lambda^2=0.$$

由于符号的选取共有八种，对于每个 λ 值共有八个球面，它们分别位于八个卦限内．且球心坐标是：

$$x_0=\mp\lambda,\quad y_0=\mp\lambda,\quad z_0=\mp\lambda,$$

即 $(\lambda, \lambda, \lambda)$；$(-\lambda, \lambda, \lambda)$；$(\lambda, -\lambda, \lambda)$；$(\lambda, \lambda, -\lambda)$；$(\lambda, -\lambda, -\lambda)$；$(-\lambda, \lambda, -\lambda)$；$(-\lambda, -\lambda, \lambda)$；$(-\lambda, -\lambda, -\lambda)$．消去 λ 后得所求的球心的轨迹是

$$\pm x=\pm y=\pm z.$$

此表示过原点的四条直线

$$x=y=z;\quad -x=y=z;\quad x=-y=z \text{ 和 } x=y=-z.$$

【例 5】 求证到两个球面等切线长的点的轨迹是一平面，且此平面与两个球面中心联线相垂直(此平面叫两个球面的根面)．

【证】 已知两个球面

$$S_i\equiv x^2+y^2+z^2+2u_ix+2v_iy+2w_iz+d_i=0\quad(i=1,\ 2).$$

设有动点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，由例 3，P_0 到这两个球面的切线长将是

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2+2u_ix_0+2v_iy_0+2w_iz_0+d_i}\quad(i=1,\ 2).$$

根据假设，它们相等，故有

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2+2u_1x_0+2v_1y_0+2w_1z_0+d_1$$
$$=x_0^2+y_0^2+z_0^2+2u_2x_0+2v_2y_0+2w_2z_0+d_2.$$

化简得

$$2(u_1-u_2)x_0+2(v_1-v_2)y_0+2(w_1-w_2)z_0+d_1-d_2=0.$$

故所求的轨迹是平面

$$2(u_1-u_2)x+2(v_1-v_2)y+2(w_1-w_2)z+d_1-d_2=0. \quad \text{(A)}$$

且此平面方程一次项的系数恰好是两个球心联线的一组方向数，因此平面与球心联线相垂直. 】

注意 (A)式可以简记作 $S_1-S_2=0$, 必须注意 S_1 和 S_2 中 x^2 项的系数为 1.

*【例 6】 (1)已知三个球面，它们的球心不共线，则每两个球面的根面共有三个，必共线(此直线叫三个球面的**根轴**). (2)已知四个球面，它们的球心不共线则每三个球面的根轴共四条，必共点(此点叫四个球面的**根心**).

【证】 (1) 设三个球心不共线的球面是

$$S_i=x^2+y^2+z^2+2u_ix+2v_iy+2w_iz+d_i=0 \ (i=1, 2, 3).$$

于是得到三个根面

$$U_1\equiv S_2-S_3=0, \quad U_2\equiv S_3-S_1=0, \quad U_3\equiv S_1-S_2=0.$$

由例 5 及假设知这三个根面必两两相交，且 $U_1+U_2+U_3\equiv0$, 由第三章第七节定理 3, 即知这三个根面必共线，且方程是 $S_1=S_2=S_3$.

(2) 设四个球心不共线的球面是

$$S_i\equiv x^2+y^2+z^2+2u_ix+2v_iy+2w_iz+d_i=0 \ (i=1, 2, 3, 4).$$

于是四条根轴方程是

$$S_2=S_3=S_4, \quad S_1=S_3=S_4, \quad S_1=S_2=S_4, \quad S_1=S_2=S_3.$$

且此四条共点，它们的交点是 $S_1=S_2=S_3=S_4$ 的解. 】

1·5 平面与球面的关系

现在讨论法线式平面

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p \tag{23}$$

与球面(2)的位置关系. 设球心(x_0, y_0, z_0)到平面(23)的距离是 d, 于是，根据 $d>r$、$d=r$、$d<r$, 则有平面与球面相离、

相切、相交三种关系．这里

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|.$$

定理 6 平面(23)与球面(2)相离、相切或相交的充要条件分别是

$$|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|>r, \tag{24}$$

$$|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|=r, \tag{25}$$

和

$$|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|<r. \tag{26}$$

定义 过球面上的一点，且与过此点的半径垂直的平面，叫做在此点的球面的切面．半径所在的直线叫做球面的法线．

定理 7 球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 上一点 (a, b, c) 的切面方程是

$$ax+by+cz=r^2, \tag{27}$$

法线方程是

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}. \tag{28}$$

【证】 因为半径所在的直线的一组方向数是 a, b, c，它也就是切面法线的方向数，故过 (a, b, c) 的切面方程是

$$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0,$$

但 (a, b, c) 在球面上，故得切面方程(27)．

再利用直线方程的两点式，即得法线方程(28)．∎

定理 8 球面(2)上一点 (a, b, c) 的切面方程是

$$(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)+(c-z_0)(z-z_0)=r^2, \tag{29}$$

法线方程是

$$\frac{x-x_0}{a-x_0}=\frac{y-y_0}{b-y_0}=\frac{z-z_0}{c-z_0}. \tag{30}$$

【证】 以 (x_0, y_0, z_0) 为新原点，作平移

$$x=x'+x_0,\quad y=y'+y_0,\quad z=z'+z_0.$$

于是点 (a, b, c) 在新系下的坐标是 $(a-x_0, b-y_0, c-z_0)$. 又由 (27) 和 (28) 知，在新系下切面及法线方程分别是

$$(a-x_0)x'+(b-y_0)y'+(c-z_0)z'=r^2$$

及
$$\frac{x'}{a-x_0}=\frac{y'}{b-y_0}=\frac{z'}{c-z_0}.$$

它们在旧系下的方程即为 (29) 及 (30). 】

【例 7】 求与三个坐标面都相切的球面的球心的轨迹.

解：设 (2) 为所求. 由于它和 $x=0$ 相切，则球心 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $x=0$ 的距离是半径 r，即 $|x_0|=r$. 同理，$|y_0|=r$，$|z_0|=r$. 即

$$x_0=\varepsilon_1 r,\quad y_0=\varepsilon_2 r,\quad z_0=\varepsilon_3 r,\quad \varepsilon_i=\pm 1\quad (i=1, 2, 3).$$

因此，以 r 为半径与坐标面都相切的球面方程可以写作

$$(x+\varepsilon_1 r)^2+(y+\varepsilon_2 r)^2+(z+\varepsilon_3 r)^2=r^2.$$

由于符号选取共有八种，对于每一个 r 值共有八个球面，它们分别位于八个卦限内，且所求球心的轨迹是过原点的四条直线：

$$x=y=z;\quad -x=y=z;\quad x=-y=z;\quad -x=-y=z.$$

*1·6 两球面的关系

已知球心是 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，且半径分别是 r_1 及 r_2 的两个球面，则它们的位置关系有下列几种情况：

1. 两个球面没有公共点：

(1) 一个球面在另一个外部，这两个球面叫做外离. 于是

$$|P_1P_2|>r_1+r_2.$$

(2) 一个球面在另一个内部，这两个球面叫做内含. 于是

$$|P_1P_2|<r_1 \quad 或 \quad r_2.$$

(3) 两个球心重合叫做同心球，于是 $P_1 \equiv P_2$.

2. 两个球面只有一个公共点，叫做**相切球面**.

(1) 一个球心在另一个球面外部，这时两球面叫做**外切**. 于是

$$|P_1P_2| = r_1 + r_2.$$

(2) 一个球心在另一个球面内部，这时两球面叫做**内切**. 于是

$$|P_1P_2| = |r_1 - r_2|.$$

3. 两个球面有多于一个的公共点，叫做**相交球面**. 即

$$r_1 + r_2 > |P_1P_2| > |r_1 - r_2|.$$

读者可试自行写出以上各情况用坐标表示的充要条件.

下面研究两个相交球面的一个度量性质——交角问题. 首先规定两个球面在交点处的交角为二球面在此点的两个切面的交角.

设二相交球面的方程是

$$(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2 = r_i^2 \quad (i=1, 2).$$

它们在公共点 (a, b, c) 处的切面是

$$(a-x_i)(x-x_i) + (b-y_i)(y-y_i) + (c-z_i)(z-z_i) = r_i^2 \quad (i=1, 2).$$

于是交角 θ 适合

$$\cos\theta = \frac{\pm[(a-x_1)(a-x_2)+(b-y_1)(b-y_2)+(c-z_1)(c-z_2)]}{\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(c-z_1)^2}\sqrt{(a-x_2)^2+(b-y_2)^2+(c-z_2)^2}}.$$

现在将分子变形：由恒等式

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2 &= [(a-x_1)-(a-x_2)]^2 \\ &= (a-x_1)^2 + (a-x_2)^2 - 2(a-x_1)(a-x_2)\end{aligned}$$

得 $$(a-x_1)(a-x_2) = \frac{1}{2}[(a-x_1)^2 + (a-x_2)^2 - (x_1-x_2)^2],$$

同理 $$(b-y_1)(b-y_2) = \frac{1}{2}[(b-y_1)^2 + (b-y_2)^2 - (y_1-y_2)^2],$$

$$(c-z_1)(c-z_2) = \frac{1}{2}[(c-z_1)^2 + (c-z_2)^2 - (z_1-z_2)^2].$$

但 (a, b, c) 在两个球面上，故有

$$(a-x_i)^2 + (b-y_i)^2 + (c-z_i)^2 = r_i^2 \quad (i=1, 2).$$

从而得

$$\cos\theta = \pm\frac{(r_1^2 + r_2^2 - \overline{O_1O_2}^2)}{2r_1r_2}. \tag{31}$$

这里 O_1, O_2 是两个球面的球心.

值得注意的是：公式(31)与两球面的交点的取法无关，从而有

定理 9 二球面相交，则所有交点处的交角都相同，并由公式(31)表示。

推论 二球面

$$x^2+y^2+z^2+2u_ix+2v_iy+2w_iz+d_i=0 \quad (i=1,\ 2)$$

直交的充要条件是

$$2u_1u_2+2v_1v_2+2w_1w_2-d_1-d_2=0. \tag{32}$$

【证】 由 $r_i^2=u_i^2+v_i^2+w_i^2-d_i$, $\overline{O_1O_2}^2=(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2+(w_2-w_1)^2$ 代入公式(31)即得(32)。】

【例 8】 求与四个球面

$$x^2+y^2+z^2+2u_ix+2v_iy+2w_iz+d_i=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

都直交的球面方程。

解：设

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \tag{A}$$

是所求的球面方程。由直交条件(32)得

$$2u_iu+2v_iv+2w_iw-d_i-d=0. \tag{B_i}$$

将(A)和(B_i)看作是五个以 u, v, w, d 为未知数的方程。由附录第三节可知：方程组有解的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ -d_1 & u_1 & v_1 & w_1 & -1 \\ -d_2 & u_2 & v_2 & w_2 & -1 \\ -d_3 & u_3 & v_3 & w_3 & -1 \\ -d_4 & u_4 & v_4 & w_4 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

它就是所求的球面方程。

1·7 空间圆的方程

一个球面与一平面相交，则它们的交线必是圆，于是得空间圆的普遍方程是

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2 \\ ax+by+cz+d=0. \end{cases} \tag{33}$$

显然从球心到平面所作垂线的垂足就是这个圆的圆心，且由球心到平面的距离及球的半径 r，即可求得圆的半径.

现在推求空间圆的参数方程. 今有以 C 为圆心，r 为半径的一个圆. 以 O 为原点建立坐标系，使 xy 面与圆所在平面平行（图 6-6）. 过 C 作 Cx' 和 Cy' 分别与 x 轴及 y 轴平行. 设 P 是圆上任一点，又 $\angle x'CP=\theta$，则由图 6-6，知 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}+\overrightarrow{CP}$，于是得

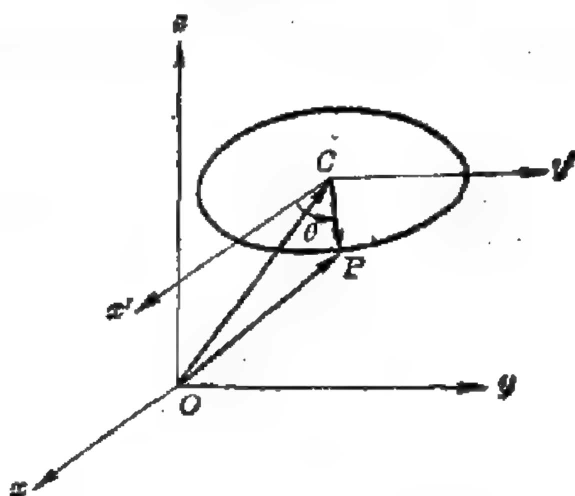


图 6-6

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}+r\boldsymbol{e}(\theta)\quad(0<\theta\leqslant 2\pi). \tag{34}$$

此处 $$\boldsymbol{C}=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}.$$

(34) 为向量形式的圆的参数方程. 化成坐标形式，即得

$$x=c_1+r\cos\theta,\ y=c_2+r\sin\theta,\ z=c_3\quad(0<\theta\leqslant 2\pi). \tag{35}$$

【例 9】 求空间圆 $|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|=r$，$\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}=p$ 的圆心和半径。

解：过球心且垂直于圆所在的平面的直线方程是

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{N}^0.$$

求此直线和平面的交点即得圆心. 为此，将直线方程代入平面方程得

$$\boldsymbol{N}^0\cdot(\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{N}^0)=p,$$

于是得 $$t=p-\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}_0.$$

故得圆心为 $$\boldsymbol{P}_0+(p-\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}_0)\boldsymbol{N}^0.$$

球心到平面的距离是 $|\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}_0-p|$，故得圆的半径是 $\sqrt{r^2-|\boldsymbol{N}^0\cdot\boldsymbol{P}_0-p|^2}$.

*【例 10】 求证 $x=a\cos^2 t,\ y=a\sin^2 t,\ z=a\sqrt{2}\sin t\cdot\cos t\ (0<t\leqslant\pi)$ 表示一圆，且求此圆的半径。

【证及解】 从已知方程中消 t，得

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \tag{A}$$

$$x+y=a. \tag{B}$$

由球心(0, 0, 0)到(B)的距离是 $\dfrac{a}{\sqrt{2}}<a$，故交线是实圆。

在 xy 面上将坐标轴旋转 45°，即有坐标变换

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'),\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'),\quad z=z'.$$

于是(A)化为

$$x'^2+y'^2+z'^2=a^2, \tag{A'}$$

(B)化为

$$x'=\frac{a}{\sqrt{2}}. \tag{B'}$$

(A′)及(B′)相交圆的半径是 $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

1·8 球面族

我们知道，四个条件确定一个球面，如果少于四个条件，则所确定的球面方程中必含有参数，当参数变化时，得到许多球面。我们把它们叫做*球面族*。特别是把过一圆的球面族叫做*球面束*。

定理 10 方程

$$S+2k\alpha=0\quad(-\infty<k<\infty) \tag{36}$$

表示通过平面

$$\pi:\quad \alpha\equiv Ax+By+Cz+D=0,\quad A^2+B^2+C^2\neq0 \tag{37}$$

和球面

$$K:\quad S\equiv x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0,$$

$$u^2+v^2+w^2-d>0 \tag{38}$$

所交成的圆 C 的球面束，这里 k 是参数。反过来，过圆 C 的

球面束的方程可以写作(36).

【证】 1. 首先证明对一个定数 k, (36)表示一球面.

(1) $k=0$ 时, 即原球面 K.

(2) $k\neq 0$ 时, 由于 π 和 K 交成一个圆, 则有

$$
\begin{aligned}
&(A^2+B^2+C^2)(u^2+v^2+w^2-d)\\
&\quad >(uA+vB+wC-D)^2. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

将(36)写成

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2+2(u+kA)x+2(v+kB)y\\
&\quad +2(w+kC)z+d+2kD=0.
\end{aligned}
$$

现证此方程表示一球面:

$$
\begin{aligned}
&(u+kA)^2+(v+kB)^2+(w+kC)^2-(d+2kD)\\
&=u^2+v^2+w^2-d+2k(uA+vB+wC-D)\\
&\quad +k^2(A^2+B^2+C^2)\\
&=\frac{1}{A^2+B^2+C^2}[(A^2+B^2+C^2)(u^2+v^2+w^2-d)\\
&\quad +2k(uA+vB+wC-D)(A^2+B^2+C^2)\\
&\quad +k^2(A^2+B^2+C^2)^2]\\
&>\frac{1}{A^2+B^2+C^2}[(uA+vB+wC-D)^2\\
&\quad +2k(uA+vB+wC-D)(A^2+B^2+C^2)\\
&\quad +k^2(A^2+B^2+C^2)^2]\\
&=\frac{1}{A^2+B^2+C^2}[(uA+vB+wC-D)\\
&\quad +k(A^2+B^2+C^2)]^2>0.
\end{aligned}
$$

故

$$
(u+kA)^2+(v+kB)^2+(w+kC)^2-(d+2kD)>0,
$$

即知(36)确是表示一球面. 又由圆 C 上的点的坐标适合(36), 故(36)过圆 C.

2．证明过圆 C 的任何球面 K_0 都包括在方程(36)内．

(1) 如果 K_0 是 K 时，可取 $k=0$．

(2) 如果 K_0 不是 K，取不在圆 C 上的一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，于是有

$$\alpha_0 \equiv Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0,$$

$$S_0 \equiv x_0^2+y_0^2+z_0^2+2ux_0+2vy_0+2wz_0+d\neq 0.$$

这时 K_0 可以由圆 C 和 P_0 唯一确定，这是因为圆由不共线的三个点唯一确定，而球面由不共面的四个点唯一确定的缘故．过圆 C 的球面(36)如果通过 P_0，则有 $S_0+2k\alpha_0=0$．由于 $\alpha_0\neq 0$, $S_0\neq 0$，故得 $k=-\dfrac{S_0}{2\alpha_0}$，这时 K_0 的方程可由

$$S-\frac{2S_0}{2\alpha_0}\alpha=0 \quad 或 \quad \alpha_0 S-S_0\alpha=0$$

表示．于是过圆 C 的任何球面都可写成(36)的形式．▌

定理 11 方程

$$\lambda_1 S_1+\lambda_2 S_2=0,\ \lambda_1+\lambda_2\neq 0\ \ (-\infty<\lambda_1,\ \lambda_2<+\infty) \tag{39}$$

表示通过两个相交定球面

$$K_1:\quad S_1\equiv x^2+y^2+z^2+2u_1x+2v_1y+2w_1z+d_1=0,$$
$$u_1^2+v_1^2+w_1^2-d_1>0 \tag{40}$$

和

$$K_2:\quad S_2\equiv x^2+y^2+z^2+2u_2x+2v_2y+2w_2z+d_2=0,$$
$$u_2^2+v_2^2+w_2^2-d_2>0 \tag{41}$$

所交的圆 C 的球面束，这里 λ_1, λ_2 是参数．反之，过圆 C 的球面束的方程可以写作(39)．

其证明作为练习，留给读者试自行补上．

注意 当 $\lambda_1+\lambda_2=0$ 时，(39)就是两个球面的根面(见例5)．

【例 11】 求过定圆的球面的球心轨迹．

解：已知定圆由(37)和(38)表示，则过定圆的球面束是 $S+2k\alpha=0$. 于是球心轨迹是

$$x=-(u+kA),\ y=-(v+kB),\ z=-(w+kC).$$

也可写作

$$x=-u+tA,\ y=-v+tB,\ z=-w+tC\quad(-\infty<t<\infty).$$

这表示过点$(-u,\ -v,\ -w)$，方向数为 $A,\ B,\ C$ 的一条直线，也就是过球面 $S=0$ 的球心与平面 $\alpha=0$ 垂直的一条直线.

*【例 12】 已知不过原点的定直线上任意一点 P. A、B、C 是它在三个坐标轴上的射影. 求证球面 $OABC$ 必过一定圆.

【证】 已知定直线 $x=x_0+tl,\ y=y_0+tm,\ z=z_0+tn\ (x_0^2+y_0^2+z_0^2\neq0)$. 取 P 点为$(x_0+tl,\ y_0+tm,\ z_0+tn)$. 于是得

$$A(x_0+tl,\ 0,\ 0),\ B(0,\ y_0+tm,\ 0),\ C(0,\ 0,\ z_0+tn).$$

设过 $OABC$ 的球面方程是

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0.$$

由于过 O, 所以 $d=0$, 又过 $A(x_0+tl,\ 0,\ 0)$, 于是有

$$x_0+tl+2u=0,$$

从而得

$$2u=-(x_0+tl).$$

同理,得

$$2v=-(y_0+tm),\ 2w=-(z_0+tn).$$

于是球面 $OABC$ 的方程为

$$x^2+y^2+z^2-(x_0+tl)x-(y_0+tm)y-(z_0-tn)z=0.$$

也即

$$x^2+y^2+z^2-x_0x-y_0y-z_0z-t(lx+my+nz)=0.$$

这表示过定圆

$$x^2+y^2+z^2-x_0x-y_0y-z_0z=0,\ lx+my+nz=0\ (x_0^2+y_0^2+z_0^2\neq0)$$

的球面束的方程,即得证. 】

习 题 6·1

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ 的球心和半径.
2. 求证球面方程可以写作 $\boldsymbol{P}^2-2\boldsymbol{P}_0\cdot\boldsymbol{P}+k=0$.

3. 求以(x_0, y_0, z_0)为球心且过点(a, b, c)的球面方程.

4. 求球面$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$和

(1) 直线 $\dfrac{x-a}{\lambda}=\dfrac{y-b}{\mu}=\dfrac{z-c}{\nu}$, $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$;

(2) 平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$

相切的充要条件.

5. 已知一球面$x^2+y^2+z^2=r^2$, 求(1)上半球面; (2)下半球面; (3)位于第一卦限的$\dfrac{1}{8}$球面的参数方程.

6. 求过四点$(0, 0, 0)$、$(0, 1, -1)$、$(-1, 2, 0)$和$(1, 2, 3)$的球面方程.

7. 求证$(-3, 1, -4)$在球面$x^2+y^2+z^2+6x+24y+8z=0$上, 且求在这点处的切面方程.

*8. 求过三点$(2, 2, -1)$, $(3, -1, 4)$, $(1, 3, -2)$且与球面$x^2+y^2+z^2-3x+y+z=0$直交的球面方程.

9. 求证$x=a\sin 2t$, $y=a(1-\cos 2t)$, $z=2a\cos t\,(0<t\leqslant 2\pi)$是一球面曲线.

10. 求证与定平面相切, 且半径为一定数的球心轨迹是与定平面平行的两平面.

11. 设已知球面$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$与平面族$ax+by+cz+\lambda=0$相交成圆族, 求$\lambda$所适合的条件, 并求圆半径变化的范围.

12. 求证

$$x=\frac{a-1}{\sqrt{2}}\cos t,\ y=\frac{a+1}{\sqrt{2}}\cos t,\ z=\sqrt{a^2+1}\sin t\quad (0<t\leqslant 2\pi)$$

表示一个圆, 且求圆心及半径.

*13. (1) 求过$A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$及原点的球面方程, 且求球心和半径.

(2) 求过$A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$三点的圆的方程, 且求圆心和半径.

(3) 设球面$OABC$的球心是U. 求证以OU为直径的球面必过四面体$OABC$的六个棱的中点.

［提示：(2)过此三点及任选与此三点不共面的第四点所构成的球面与此三点所在的平面的交线即为所求，但第四点以取原点为最简单.］

第二节　直圆柱面和直圆锥面

2·1　直圆柱面的方程

定义　与一定直线的距离是定长的空间点的轨迹叫做直圆柱面，此定直线叫轴，定长叫底半径.

显然与轴垂直的平面的平截线是以定长为半径的圆(图 6-7).

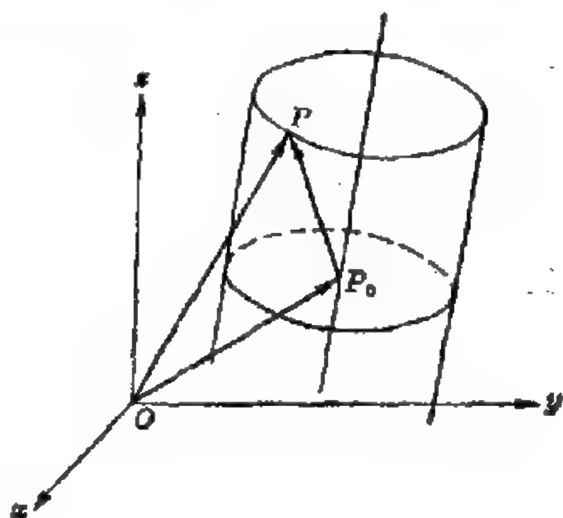


图　6-7

定理 1　以 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 为轴，a 为底半径的直圆柱面的方程的向量形式是

$$|(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)\times\boldsymbol{S}^0|=a.\quad(1)$$

坐标形式是

$$\sum[(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta]^2=a^2.\qquad(2)$$

这里　$\boldsymbol{P}_0=\{x_0,\ y_0,\ z_0\}$，$\boldsymbol{S}^0=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$.

【证】　设 P 是直圆柱面上的任一点，利用第四章第三节(15)式即可得出(1)式，然后即可化成(2)式. 】

推论　以 z 轴为轴，a 为底半径的直圆柱面的方程是

$$x^2+y^2=a^2.\qquad(3)$$

【证】　此时取 $x_0=y_0=z_0=0$，$\cos\alpha=\cos\beta=0$，$\cos\gamma=1$，则(2)式即化成(3)式. 】

【例 1】　设有直圆柱面，与它的轴垂直的平面的平截线

是圆 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=b$, $|b|<a$. 求这直圆柱面的方程.

解: 将 $z=b$ 代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 中, 得

$$x^2+y^2=a^2-b^2. \qquad (*)$$

这就是直圆柱面的方程. 因此已知圆可以看作是直圆柱面(*)与 $z=b$ 的交线.

【例 2】 **维维安尼(Viviani)曲线** 求证 $x^2+y^2=ax$, $a>0$, 表示一个直圆柱面, 且求它和球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的交线的参数方程, 并证它是四次曲线.

【证及解】 由 $x^2+y^2=ax$ 可以写成

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

作平移 $x=x'+\frac{a}{2}$, $y=y'$, $z=z'$, 则上面方程化成 $x'^2+y'^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$, 这与(3)式相同, 故已知曲面表示以 Z' 轴方向为轴方向、$\frac{a}{2}$ 为底半径的直圆柱面.

利用圆的参数方程可设 $x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t$, $y=\frac{a}{2}\sin t$ $(\theta<t\leqslant 2\pi)$, 代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 中, 得 $z=a\sin\frac{t}{2}$. 再令 $t=2u$, 得交线的参数方程是

$$x=a\cos^2 u,\quad y=a\sin u\cos u,\quad z=a\sin u\ (0\leqslant u<\pi),$$

再设 $\operatorname{tg}\frac{u}{2}=v$, 则 $\sin u=\frac{2v}{1+v^2}$, $\cos u=\frac{1-v^2}{1+v^2}$, 于是上面方程化为

$$x=a\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2,\quad y=\frac{2av(1-v^2)}{(1+v^2)^2},$$

$$z=\frac{2av}{1+v^2}\ (0\leqslant v<+\infty).$$

由于它是两个代数曲面的交线, 故必是代数曲线. 现求其次

数．设有平面 $Ax+By+Cz+D=0$，将曲线方程代入，得

$$Aa(1-v^2)^2+2Bav(1-v^2)+2Cav(1+v^2)$$
$$+D(1+v^2)^2=0.$$

此是 v 的四次方程，故必是四次代数曲线，其图形见第四节图6-19．

【例 3】 **圆形螺旋线** 当螺旋旋转时，螺旋上的点一方面绕螺旋的轴作圆运动，另一方面又沿轴的方向前进，试求这点的轨迹方程．

解：设动点由 $P_0(a, 0, 0)$ 开始运动(图 6-8)，一方面以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以速度 v 沿 z 轴方向移动，这里 ω 及 v 都是常数．于是对于轨迹上的任意一点 $P(x, y, z)$，有

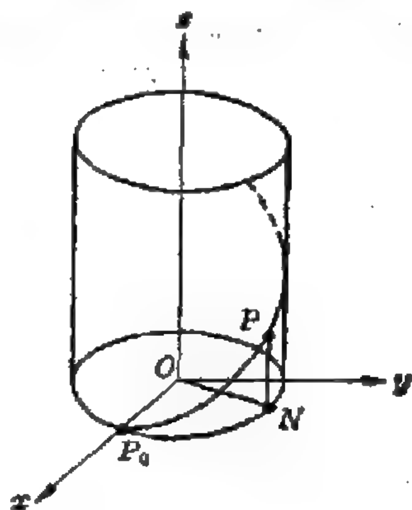


图 6-8

$$x=a\cos\omega t,\ y=a\sin\omega t,\ z=vt\ \ (0<t<+\infty). \qquad \text{(A)}$$

这就是所求轨迹的参数方程．从(A)中消去 t，得

$$x^2+y^2=a^2, \quad y=a\sin\left(\frac{\omega z}{v}\right). \qquad \text{(B)}$$

此即曲线的普遍方程，由(B)可以看出曲线必在直圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上．

2·2 柱坐标系

下面再介绍另外一种空间坐标系——柱坐标系，也叫半极坐标系，它是由平面极坐标系及空间直角坐标系中的一部分建立起来的．

已知空间直角坐标系，又知任一点 $P(x, y, z)$，它在 xy 面上的射影是 N(图 6-5)．如果 xy 面内 N 的极坐标是 (ρ, θ)，

又 $NP=z$, 利用$(\rho,\ \theta,\ z)$即可定 P 的位置. 我们把它叫做 P 点的柱坐标, 且有

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z\ \ (-\infty<\rho,\ \theta,\ z<+\infty). \tag{4}$$

由(4)得

$$\rho^2=x^2+y^2,\ \ \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},\ \ z=z. \tag{5}$$

(4)及(5)就是直角坐标与柱坐标的坐标变换公式.

2·3 直圆锥面的方程

定义 已知一定直线上的一定点, 过空间任一点与定点作直线, 使与定直线所成的锐角永远相等, 则动点的轨迹叫做直圆锥面, 此定直线叫轴, 定点叫顶, 定锐角叫半顶角.

显然与直圆锥面的轴垂直的平面的平截线必是一个圆.

定理 2 以 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}^0$ 为轴, P_0 为顶点, θ 为半顶角的直圆锥面方程的向量形式是

$$|(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)\times\boldsymbol{S}^0|=\sin\theta\,|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|. \tag{6}$$

坐标形式是

$$\begin{aligned}&[(y-y_0)\cos\gamma\\&\quad-(z-z_0)\cos\beta]^2\\&\quad+[(z-z_0)\cos\alpha\\&\quad-(x-x_0)\cos\gamma]^2\\&\quad+[(x-x_0)\cos\beta\\&\quad-(y-y_0)\cos\alpha]^2\\&=\sin^2\theta[(x-x_0)^2\\&\quad+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2].\end{aligned} \tag{7}$$

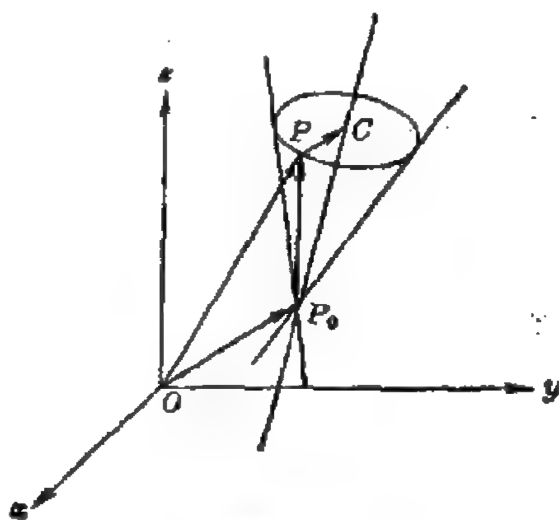


图 6-9

这里 $\boldsymbol{P}_0=\{x_0,\ y_0,\ z_0\}$, $\boldsymbol{S}^0=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$.

【证】 在图 6-9 里，设 P 是直圆锥面上的任一点，又 P 在轴上的射影是 C. 于是 $\angle PP_0C=\theta$, $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{P_0P}|}$, 即得(6)式，然后即可化成(7)式. ▌

推论 以 z 轴为轴、原点为顶点、θ 为半顶角的直圆锥面方程是

$$x^2+y^2=z^2\cdot\mathrm{tg}^2\theta. \tag{8}$$

【证】 取 $x_0=y_0=z_0$, $\cos\alpha=\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1$, 则(7)式简化成

$$x^2+y^2=\sin^2\theta(x^2+y^2+z^2).$$

将 $\sin^2\theta(x^2+y^2)$ 移到左边，得到

$$(x^2+y^2)\cos^2\theta=z^2\sin^2\theta.$$

再将等式两端除以 $\cos^2\theta$, 即得(8)式. ▌

【例 4】 求证 $2xy=z^2$ 是一个直圆锥面，且求它的顶点、轴和半顶角.

【证及解】 在 xy 面内旋转坐标轴 45°，即

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\ z=z'.$$

于是 $2xy=z^2$ 化成

$$x'^2-y'^2=z'^2\ \text{即}\ y'^2+z'^2=x'^2,$$

利用公式(6)，这表示以原点为顶点，x 轴为轴，半顶角是 45° 的直圆锥面.

【例 5】 设一直圆锥面的顶点在原点，轴的方向余弦是 λ, μ, ν, 且过 z 轴. 求平面 $y=kx$ 与这个锥面交线的方程.

解：由(7)得锥面方程

$$(y\nu-z\mu)^2+(z\lambda-x\nu)^2+(x\mu-y\lambda)^2$$
$$=\sin^2\theta(x^2+y^2+z^2). \tag{A}$$

在 z 轴上取一点(0, 0, 1)，此点必在(A)上，即 $\sin^2\theta=\lambda^2+\mu^2$，于是(A)化为

$$(y\nu-z\mu)^2+(z\lambda-x\nu)^2+(x\mu-y\lambda)^2$$
$$=(\lambda^2+\mu^2)(x^2+y^2+z^2).$$

即

$$x^2(\nu^2-\lambda^2)+y^2(\nu^2-\mu^2)-2\mu\nu yz$$
$$-2\nu\lambda zx-2\lambda\mu xy=0. \tag{B}$$

现求(B)与

$$y=kx \tag{C}$$

的交线. 将(C)代入(B)中，得

$$x^2(\nu^2-\lambda^2)+k^2x^2(\nu^2-\mu^2)-2\mu\nu kzx$$
$$-2\nu\lambda zx-2\lambda\mu kx^2=0.$$

即

$$x[x(\nu^2-\lambda^2+k^2\nu^2-k^2\mu^2-2\lambda\mu k)-2\nu z(\mu k+\lambda)]=0.$$

所求交线是

$$x=0,\quad y=kx \tag{D}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&x(\lambda^2-\nu^2+k^2\nu^2-k^2\mu^2-2\lambda\mu k)-2\nu z(\mu k+\lambda)=0,\\&y=kx.\end{aligned}\right. \tag{E}$$

又(D)是 z 轴，故交线除 z 轴外就是直线(E).

习 题 6·2

1. 求以 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{6}$ 为轴，底半径为 2 的直圆柱面方程.
2. 求以 (2, −3, 5) 为顶点，1, 1, 1 为轴的方向数，半顶角为 30° 的直圆锥面方程.
3. 求以 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}^0$ 为轴，且过 $A(\alpha, \beta, \gamma)$ 的直圆柱面方程.
4. 求以 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}^0$ 为轴，P_0 为顶点，且过 $A(\alpha, \beta, \gamma)$ 的直圆锥面方程.
5. 求以 $\boldsymbol{P}=t\boldsymbol{S}^0$ 为轴，原点为顶点，且过 z 轴的直圆锥面方程.

6. 求证二次曲面

$$(cy-bz)^2+(az-cx)^2+(bx-ay)^2=1$$

表示一个直圆柱面，且求它的轴的方向数和底半径。

7. 求平面 $y=kx$ 与(1)直圆柱面 $x^2+y^2=a^2$；(2)直圆锥面 $x^2+y^2=z^2\cdot\text{tg}^2\theta$ 的交线。

8. 求证曲面

$$x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\ z=v\quad(0\leqslant\theta<2\pi,\ -\infty<v<+\infty)$$

表示一个直圆柱面。当 $\theta=\theta_0$(常数)，$v=v_0$(常数)时，各表示什么曲线？

9. 分别求直圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和直圆锥面 $x^2+y^2=z^2\cdot\text{tg}^2\theta$ 的参数方程，再求它们的交线的参数方程。

*10. 求过两个球面

$$x^2+y^2+z^2=5,\ (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=1$$

的交线的直圆柱面的方程。

[提示：以两球心的联线为新 x 轴，作坐标轴的旋转。]

第三节 曲线产生曲面

3·1 曲面方程的第二种建立法

在第五章里，我们已经知道曲面是看作适合某种条件的动点的轨迹，根据条件可以建立它的方程。前面所介绍的球面、直圆柱面和直圆锥面的方程都是这样建立起来的。

但是在某些情况下，曲面也可以看作是由曲线依据某种规律所产生的，此时动曲线叫做*母曲线*。例如平面也可以看作是过定点且与定直线垂直的动直线所产生的，球面也可以看作是一个圆围绕某一直径旋转所产生的等等。由这个论点也可以建立它们的方程。

设有含一个参数的曲线族

$$F(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0,\quad G(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0. \tag{1}$$

由(1)的两式中消去参数 λ，得出

$$H(x, y, z)=0. \tag{2}$$

(2)表示当 λ 连续变动时，曲线族(1)所建立的曲面方程. 由于曲线产生曲面的理论较繁，这里就不详细叙述了.

一般地说，如果有含 p 个参数的曲线族

$$\begin{cases} F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)=0, \\ G(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)=0. \end{cases} \tag{3}$$

其中 p 个参数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 适合 $p-1$ 个关系式

$$\phi_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)=0 \quad (\alpha=1, 2, \cdots, p-1). \tag{4}$$

将(4)中 $p-1$ 个关系式以及(3)中 2 个关系式消去 p 个参数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$，即得曲面方程. 于是可得法则如下：

曲面可以由含一个参数的曲线族产生，在曲线族的方程中，消去参数，即可得到曲面的方程. 如果此曲线族含有 p 个参数，则此曲线族能产生一个曲面，这必须在 p 个参数间求得 $p-1$ 个关系式，然后由此 $p-1$ 个关系式及曲线族的两个方程间消去 p 个参数，就可得到曲面的方程.

因此，在解析几何里，建立曲面方程的方法一般有两种，我们将以前建立的方法叫做直译条件法，而将现在所建立的方法叫做消参数法.

【例 1】 过定点作定直线的垂线，求这些垂线所产生的曲面.

解：设定点是 (x_0, y_0, z_0)，定直线的方向数是 a, b, c. 过定点的动直线是

$$x=x_0+lt, \ y=y_0+mt, \ z=z_0+nt \ (-\infty<t<+\infty). \tag{A}$$

这里 l, m, n 是动直线的方向数. 由垂直条件得

$$al+bm+cn=0. \tag{B}$$

将(A)中 l、m、n 代入(B)，得

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

这表示过点(x_0, y_0, z_0)，以 a、b、c 为法向量的坐标的一个平面.

【例 2】 已知两条不垂直的异面直线. 过每条直线作一平面，使彼此垂直，求交线所产生的曲面.

解：设两条异面直线的方程是

$$y-mx=0,\ \ z-c=0 \quad (m\neq\pm1), \tag{A}$$

$$y+mx=0,\ \ z+c=0 \quad (m\neq\mp1), \tag{B}$$

过(A)和(B)的平面束分别是

$$y-mx+\lambda(z-c)=0, \tag{C}$$

$$y+mx+\mu(z+c)=0. \tag{D}$$

在此两平面束中各取一个平面，使彼此垂直，则有

$$1-m^2+\lambda\mu=0. \tag{E}$$

从(C)及(D)中解出 λ 与 μ 代入(E)，得

$$(1-m^2)(z^2-c^2)+y^2-m^2x^2=0.$$

这表示二次曲面，在第七章里将研究它的形状.

【例 3】 求与三条定直线

$$y=mx,\ \ z=c;\ \ y=-mx,\ \ z=-c$$

和

$$y=z,\quad mx=-c$$

都共面的直线所产生的曲面的方程.

解：过 $y=mx$, $z=c$ 和 $y=-mx$, $z=-c$ 的平面束的方程分别是

$$y-mx+\lambda(z-c)=0, \tag{A}$$

和

$$y+mx+\mu(z+c)=0. \tag{B}$$

于是这两个平面束中的平面的交线必与第三条已知直线共面. 将 $y=z$, $mx=-c$ 代入(A)和(B)中，得

$$z+c+\lambda(z-c)=0 \text{ 和 } z-c+\mu(z+c)=0.$$

从此两方程消去 z，得

$$\lambda\mu-1=0. \tag{C}$$

将(A)及(B)中的 λ 和 μ 代入(C)，得

$$y^2-m^2x^2-(z^2-c^2)=0.$$

此即所求的曲面方程.

注意 当 $\lambda=\mu=-1$ 时，(A)和(B)所表示的直线

$$y-mx=z-c,$$
$$y+mx=z+c$$

与第三条已知直线平行，且此直线仍在这曲面上. 读者试自行补证.

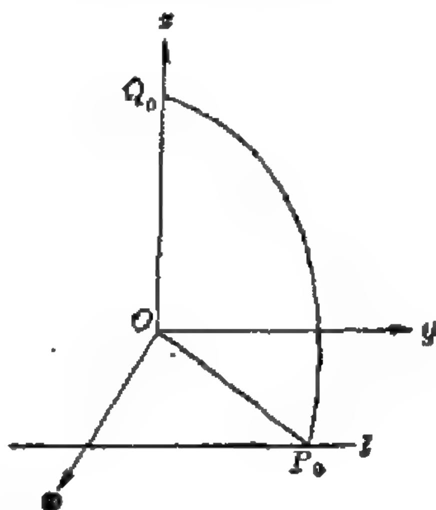


图 6-10

【例4】 已知直角坐标系 $Oxyz$，在 xy 面上作直线 l 与 y 轴平行. 在 l 上任取一点 P_0，在由 z 轴与 P_0 所定的平面内，作以 O 为圆心，OP_0 为半径的圆(图 6-10)，当 P_0 在 l 上变动时，求此圆所产生的曲面方程.

解：设 l 是 $x=a$，$z=0$. 取 $P_0(a, \lambda, 0)$，过 z 轴的平面是 $y=kx$，如过 P_0 则有 $\lambda=ka$. 于是过 P_0 及 z 轴的平面的方程是

$$ay=\lambda x, \tag{A}$$

又 $|OP_0|=\sqrt{a^2+\lambda^2}$，于是以 O 为心，$|OP_0|$ 为半径的球面方程是

$$x^2+y^2+z^2=a^2+\lambda^2. \tag{B}$$

(A)与(B)的交线即动圆的方程，将它们中的参数 λ 消去，即得所求的曲面方程. 从(A)得 $\lambda=\dfrac{ay}{x}$，代入(B)，得

$$x^2(x^2+y^2+z^2)=a^2(x^2+y^2).$$

这是一个四次曲面.

【例5】 设有一半径为 a 的球面，它的球心从定直线 l 的 O 点开始，沿定直线作匀速运动，其线速度为 v，另有垂直于定直线 l 的动平面按匀速 v 从 O 点作同向移动，求它们的交线所产生的曲面.

解：取球心所在的直线为 y 轴，以球心初始位置 O 为原点，则 t 秒后此球面方程及平面方程分别是

$$x^2+(y-vt)^2+z^2=a^2 \tag{A}$$

和

$$y=vt. \tag{B}$$

由(B)得 $t=\frac{y}{v}$，代入(A)，得

$$x^2+z^2=a^2.$$

这是一个以 y 轴为轴，a 为底半径的直圆柱面.

3·2 直纹曲面的参数方程

一直线依某种规律移动所产生的曲面叫直纹曲面，动直线叫做母线；与母线移动的轨迹相交的某一定曲线(通常可取平面曲线)叫做准曲线，简称准线[注]. 下面建立直纹曲面的方程：

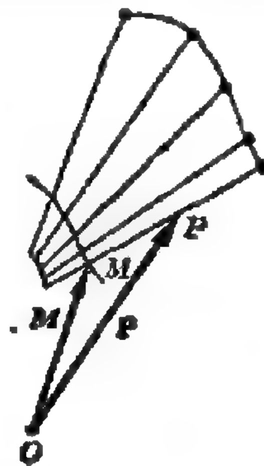


图 6-11

设准线 C 的参数方程是

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(u) \quad (u_1\leqslant u\leqslant u_2),$$

则经过准线各点的母线上的单位向量也将是 u 的函数，记作

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(u) \quad (u_1\leqslant u\leqslant u_2).$$

[注] 这里的准线不要与平面解析几何中的圆锥曲线的准线相混淆.

在准线上取 M 点，它的位置向量是 $\boldsymbol{\rho}(u)$，过 M 点的母线上的向量是 $\boldsymbol{\tau}(u)$. 当 M 点变动，也即 u 变动时，则得到一个含参数 u 的直线族(即母线族). 至于母线上的某一点 P，也即直纹曲面上的点 P 可以由它沿母线到准线的有向线段 MP 的大小 v 来确定(图 6-11). 于是点 P 的位置向量可以写作 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$，即

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\rho}(u)+v\boldsymbol{\tau}(u)\quad(u_1\leqslant u\leqslant u_2,\ -\infty<v<+\infty).\tag{5}$$

此即直纹曲面的向量形式的参数方程. 如果令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(u)&=\{f(u),\ g(u),\ h(u)\},\\ \boldsymbol{\tau}(u)&=\{l(u),\ m(u),\ n(u)\}.\end{aligned}\tag{6}$$

则(5)可以写成

$$\begin{aligned}&x=f(u)+vl(u),\quad y=g(u)+vm(u),\\ &z=h(u)+vn(u)\quad(u_1\leqslant u\leqslant u_2,\ -\infty<v<+\infty).\end{aligned}\tag{7}$$

此即直纹曲面的坐标形式的参数方程.

【例 6】 设一动直线与一定直线永远垂直相交，且动直线既沿定直线移动，又绕定直线转动，而且动直线移动的距离与它所转动的角成比例. 求动直线所产生的直纹曲面的方程.

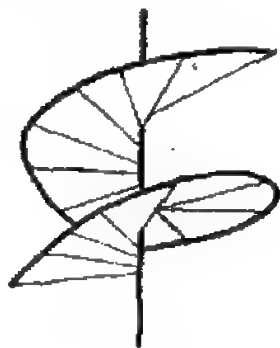


图 6-12

解：取定直线为 z 轴，并当作直纹曲面的准线. 如果母线最初的位置为 x 轴，且母线从它最初的位置所旋转的角为 u，则母线上的单位向量是

$$\boldsymbol{e}(u)=\boldsymbol{i}\cos u+\boldsymbol{j}\sin u.$$

又取 λ 为比例常数，则准线方程可以写成 $\boldsymbol{\rho}(u)=\lambda u\boldsymbol{k}$，故由(5)所求的直纹曲面(图 6-12)的方程是

$$\boldsymbol{P}=\lambda u\boldsymbol{k}+v\boldsymbol{e}(u)\quad(0<u<+\infty,\ -\infty<v<+\infty).$$

化成坐标形式，即

$$x=v\cos u,\quad y=v\sin u,\quad z=\lambda u,$$

消去参数，得 $$z=\lambda\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x},$$

这个曲面叫做直角螺旋面，或极小螺旋面.

习 题 6·3

1. 求过点(x_0, y_0, z_0)且与平面$ax+by+cz+d=0$平行的直线所产生的曲面方程.
2. 求由下列的单参数直线族所产生的直纹曲面方程:
   (1) $\frac{x-\lambda^2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-\lambda}{0}\quad(-\infty<\lambda<+\infty)$;
   (2) $x=-y+tz,\ x=y+\frac{z}{t}\quad(-\infty<t<+\infty,\ t\neq0)$;
   (3) $x+2ty+4z=4t,\ tx-2y-4tz=4\quad(-\infty<t<+\infty)$.
3. 分别求与三直线都共面的直线所产生的直纹曲面:
   (1) $y=mx,\ z=c;\ \ y=-mx,\ z=-c;\ \ y=0,\ z=0$;
   (2) $2y=1,\ 3z=x;\ \ 2y=-1,\ 3z=-x;\ \ 2y+3z=0,\ x=1$;
   (3) $3z=1,\ -2y=x;\ \ 3z=2y,\ x=1;\ \ 3z+1=0,\ 2y=x$.
4. 求与直线$y=0,\ z=c;\ \ x=0,\ z=-c$及双曲线$xy+c^2=0,\ z=0$都相交的直线所产生的直纹曲面.
5. POP'是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$的动直径，在平面$PP'ZZ'$上以$PP'$为直径作圆. 当$PP'$变动时，求动圆所产生的曲面.

*6. 动平面与定平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$平行且交三坐标轴于$A, B, C$. 求圆$ABC$所产生的曲面.
   [提示：用习题 6.1 第 13 题.]

第四节 简单的直纹曲面

4·1 柱面

与直圆柱面的轴垂直的平面的平截线必是圆；过轴的一

个平面的平截线必是与轴平行的两直线，而且这两直线必与上述圆相交．因此直圆柱面可以看作是与一定圆相交，且垂直于定圆所在平面的直线平行移动而产生的直纹曲面．将此概念加以推广，则有：

定义 一动直线始终平行于定方向，且依某种规律移动，所产生的曲面叫做*柱面*．动直线称为*母线*；与母线移动的轨迹相交的某定曲线（通常取平面曲线）叫做*准线*．下面建立柱面的方程：

设柱面的准线是

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0. \tag{A}$$

母线的方向是直线

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ E_2 &\equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{aligned} \tag{B}$$

的方向．因此母线的方程可以写作

$$E_1=\lambda, \quad E_2=\mu. \tag{C}$$

这里 λ, μ 是参数．由于(C)必须与(A)相交，即它们有公共的 x, y, z．从(A)及(C)的任意三个方程求出 x, y, z，代入其余一个，即得

$$H(\lambda, \mu)=0. \tag{D}$$

于是问题转化为求适合(D)的单参数直线族(C)所产生的直纹曲面．利用本章第三节的方法从(C)和(D)消去 λ、μ，得

$$H(E_1, E_2)=0. \tag{1}$$

这就是说：柱面上任一点的坐标适合方程(1)．

反过来，设有一点 P_0，其坐标 x_0、y_0 与 z_0 适合方程(1)，现在证明 P_0 点一定在母线平行于直线 $E_1=0$, $E_2=0$ 的柱面上．

因为 x_0, y_0 与 z_0 适合(1)，故有 $H(E_{10}, E_{20})=0$，这里

$E_{i0}=a_ix_0+b_iy_0+c_iz_0+d_i\ (i=1,\ 2)$. 过 P_0 与 $E_1=0$, $E_2=0$ 平行的直线 l 的方程是

$$a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)+c_1(z-z_0)=0,$$
$$a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)+c_2(z-z_0)=0.$$

或者写成

$$E_1=E_{10},\quad E_2=E_{20}. \tag{E}$$

必须注意：(E)中的 E_1、E_2 的 x、y、z 是直线 l 上的动点的坐标. 由于 $H(E_{10},\ E_{20})=0$, 故得 $H(E_1,\ E_2)=0$. 这说明 l 上的所有点都在曲面(1)上, 即 l 在(1)上. 由于 P_0 有许多个, 故有许多条与 $E_1=0$, $E_2=0$ 平行的直线, 它们都在曲面(1)上. 在(1)上取一条曲线 D, 使与这些直线都相交, 这样, 曲面(1)就表示以 $E_1=0$, $E_2=0$ 为母线方向, D 为准线的柱面. 且 P_0 即在这个柱面上.

从以上两方面的论证即可知(1)是所给柱面的方程.

定理 1 以 $F(x,\ y,\ z)=0$, $G(x,\ y,\ z)=0$ 为准线, 两相交平面 $E_1\equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $E_2\equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 的交线方向为母线方向的柱面方程是

$$H(E_1,\ E_2)=0. \tag{1}$$

推论 1 以 $f(x,\ y)=0$, $z=0$ 为准线, z 轴方向为母线方向的柱面方程是 $f(x,\ y)=0$; 以 $g(y,\ z)=0$, $x=0$ 为准线, x 轴方向为母线方向的柱面方程是 $g(y,\ z)=0$; 以 $h(z,\ x)=0$, $y=0$ 为准线, y 轴方向为母线方向的柱面方程是 $h(z,\ x)=0$.

推论 2 若一曲面方程仅含两个变数, 则此曲面必是一个柱面, 它的母线平行于所缺的那个变数所度量的坐标轴.

下面的一些方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3}$$

$$y^2=2px. \tag{4}$$

在平面解析几何里表示 xy 面上的曲线，它们分别是椭圆、双曲线和抛物线，但在空间解析几何里则表示柱面. 因为它们的方程是二次的，故称它们为二次柱面，而且分别称为椭圆柱面、双曲柱面和抛物柱面. 它们的图形分别见图 6-13、图 6-14 和图 6-15.

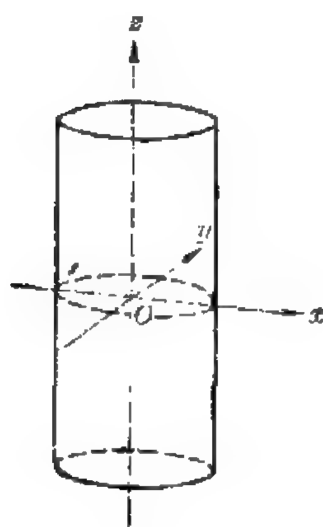


图 6-13

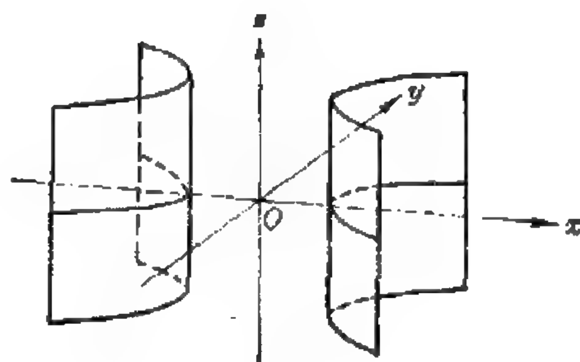


图 6-14

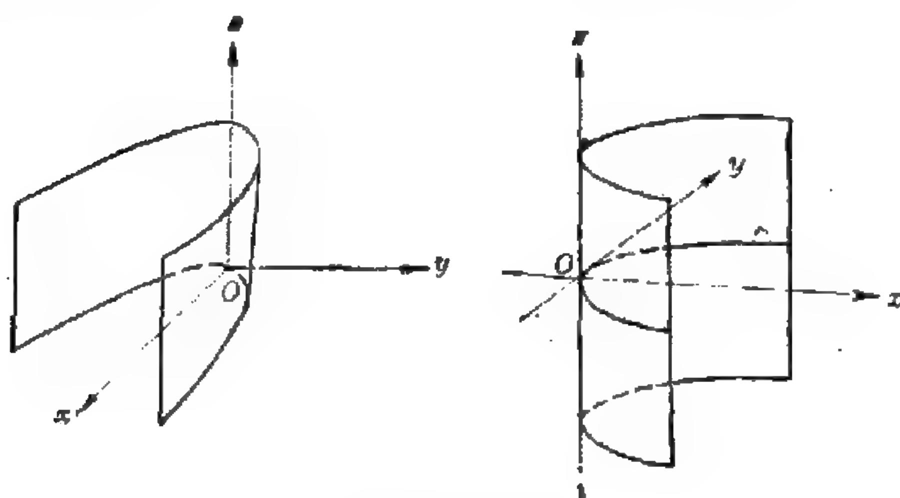


图 6-15

详细地说：(4)称为无心二次柱面，(2)和(3)称为有心二次柱面。它的标准方程可以写作

$$Px^2+Qy^2=1,\quad PQ\neq 0. \tag{5}$$

当 $P>0$, $Q>0$ 时，(5)表示椭圆柱面；$P>0$, $Q<0$ 或 $P<0$, $Q>0$ 时，(5)表示双曲柱面；$P<0$, $Q<0$ 时，(5)无实轨迹，称为虚椭圆柱面。

【例 1】 求以实的有心常态圆锥截线为准线，以定方向为母线方向的柱面方程。

解：设准线方程是 $ax^2+by^2=1$, $z=0$. l, m, n 为母线的方向数，(x_0, y_0, z_0) 是准线上的一点，则有 $ax_0^2+by_0^2=1$, $z_0=0$. 又过 (x_0, y_0, z_0) 的母线方程是

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

将 $z_0=0$ 代入，得

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z}{n}.$$

也即
$$x_0=\frac{nx-lz}{n},\quad y_0=\frac{ny-mz}{n}.$$

再代入 $ax_0^2+by_0^2=1$ 中，得

$$a(nx-lz)^2+b(ny-mz)^2=n^2.$$

此即所求的柱面方程，显见它属于(1)的形式。

【例 2】 求证下列的曲面表示柱面并作简图：

(1) $y^2=x^3$; (2) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

【证及解】 (1) 曲面 $y^2=x^3$ 仅含两个变数，故它表示以半立方抛物线 $y^2=x^3$, $z=0$ 为准线，z 轴方向为母线方向的柱面(见图 6–16)。

(2) 曲面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 仅含两个变数，故它表示

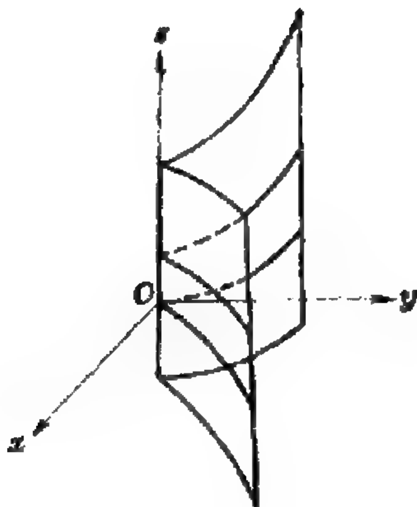


图 6-16

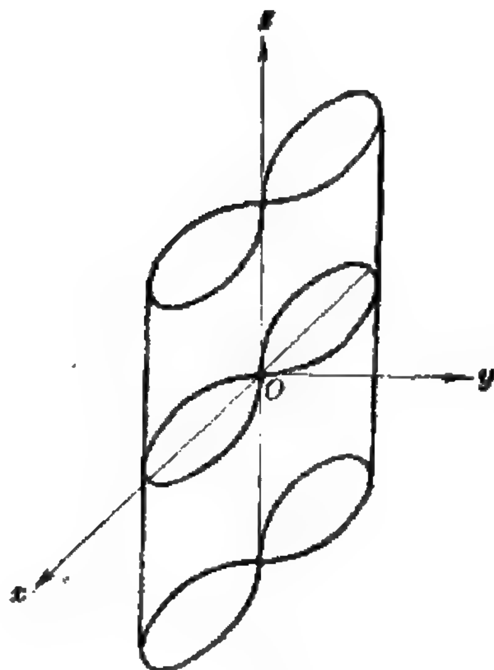


图 6-17

以双纽线 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$, $z=0$ 为准线，z 轴方向为母线方向的柱面(见图 6-17)。

*【例 3】 判断下列曲面的形状。

(1) $(x+y)(y+z)=a^2$;

(2) $(x+y)(y+z)=x+2y+z$;

(3) $f(m^{-1}y-n^{-1}z,\ n^{-1}z-l^{-1}x,\ l^{-1}x-m^{-1}y)=0$, $lmn\neq 0$.

解：(1) 与公式 (1) 相比较，曲面 $(x+y)(y+z)=a^2$ 表示以直线 $x+y=0$, $y+z=0$ 的方向为母线方向的柱面，也即母线的方向数是 1, −1, 1.

(2) 已知方程可以写为 $(x+y)(y+z)=(x+y)+(y+z)$. 由公式(1)可知此曲面表示以 1, −1, 1 为母线的方向数的柱面.

(3) 由于 $(m^{-1}y-n^{-1}z)+(n^{-1}z-l^{-1}x)=m^{-1}y-l^{-1}x$. 故曲面 $f(m^{-1}y-n^{-1}z,\ n^{-1}z-l^{-1}x,\ l^{-1}x-m^{-1}y)=0$ 就可以写为 $f[m^{-1}y-n^{-1}z,\ n^{-1}z-l^{-1}x,\ -(m^{-1}y-n^{-1}z)-(n^{-1}z-l^{-1}x)]=0$. 由公式 (1) 知，此表示以直线 $m^{-1}y-n^{-1}z=0$, $n^{-1}z-l^{-1}x=0$ 的方向数 l, m, n 为母线方向的柱面.

下面由直纹曲面的参数方程推求柱面的参数方程：

设准线的参数方程是：

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(u)=f(u)\boldsymbol{i}+g(u)\boldsymbol{j}+h(u)\boldsymbol{k}\quad(u_1\leqslant u\leqslant u_2),$$

且母线平行于常向量 $\boldsymbol{\tau}_0=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}\quad(u_1\leqslant u\leqslant u_2)$.

于是由本章第三节公式(5)，得

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\rho}(u)+v\boldsymbol{\tau}_0\quad(u_1\leqslant u\leqslant u_2,\ -\infty<v<+\infty).\tag{6}$$

此即柱面的向量形式的参数方程，化成坐标形式，即

$$\begin{gathered}x=f(u)+vl,\ y=g(u)+vm,\ z=h(u)+vn\\(u_1\leqslant u\leqslant u_2,\ -\infty<v<+\infty).\end{gathered}\tag{7}$$

【例 4】 求以 $x=\dfrac{1}{t+a},\ y=\dfrac{1}{t+b},\ z=\dfrac{1}{t+c}\ (-\infty<t<+\infty,\ t\neq-a,\ -b,\ -c)$ 为准线，母线平行于 $x=y=z$ 的柱面方程。

解：此时 $l:m:n=1:1:1$，可取常向量 $\boldsymbol{\tau}_0=\{1,\ 1,\ 1\}$，故(7)可以写为

$$x=\frac{1}{t+a}+w,\ y=\frac{1}{t+b}+w,\ z=\frac{1}{t+c}+w$$

$$(-\infty<t<\infty,\ t\neq-a,\ -b,\ -c;\ -\infty<w<+\infty).$$

4·2 锥面

与直圆锥面的轴垂直的平面的平截线必是圆，且直圆锥面上的任一点与顶点联线必与这圆相交．因此直圆锥面可以看作是过一定点(此定点位于过定圆的圆心且与定圆所在的平面相垂直的一条直线上)且与定圆相交的动直线移动而产生的直纹曲面．将此概念加以推广，则有

定义 一条动直线过一定点且依某种规律移动时所产生的曲面叫做锥面．动直线叫做锥面的母线，与母线移动的轨迹相交的定曲线(通常取不过定点的平面曲线)叫做准线，定点叫做顶点．

设锥面的准线是

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0. \tag{A}$$

又顶点(α, β, γ)是三个相交平面

$$E_i \equiv a_i x+b_i y+c_i z+d_i=0 \quad (i=1, 2, 3) \tag{B}$$

的交点，于是有

$$a_i\alpha+b_i\beta+c_i\gamma+d_i=0 \quad (i=1, 2, 3). \tag{C$_i$}$$

设过顶点的母线方程是

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}(=k). \tag{D}$$

将这三个分式的分子、分母分别用 a_i, b_i, c_i 去乘，再将所得的各分子、分母相加并利用(C_i)，即得

$$\frac{a_i(x-\alpha)+b_i(y-\beta)+c_i(z-\gamma)}{a_il+b_im+c_in}=\frac{a_ix+b_iy+c_iz+d_i}{a_il+b_im+c_in}.$$

由比例性质知，当 $i=1, 2, 3$ 时，所得的三个分式都等于 k，于是母线方程就可以写为

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{a_1l+b_1m+c_1n}=\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{a_2l+b_2m+c_2n}$$
$$=\frac{a_3x+b_3y+c_3z+d_3}{a_3l+b_3m+c_3n}.$$

或者写作

$$\frac{E_1}{l'}=\frac{E_2}{m'}=\frac{E_3}{n'}. \tag{E}$$

这里 $\quad l'=a_1l+b_1m+c_1n, \quad m'=a_2l+b_2m+c_2n,$

$$n'=a_3l+b_3m+c_3n$$

是三个参数．由于(D)必须与(A)相交，即它们有公共的 x, y, z. 从(A)及(E)的四个方程中任意取三个，求出 x, y, z, 代入其余一个，而得

$$H(l', m', n')=0. \tag{F}$$

从(E)及(F)消去 l', m', n', 得

$$H(E_1,\ E_2,\ E_3)=0. \tag{8}$$

这就是说，锥面上的任一点的坐标适合方程(8).

下面讨论方程(8)的特性．在母线方程(D)中以$l'\lambda$, $m'\lambda$, $n'\lambda$分别代替l', m', n'，然后利用同样推理，则得

$$H(\lambda l',\ \lambda m',\ \lambda n')=0. \tag{G}$$

由(G)知(F)是关于l', m', n'的齐次方程[注]，故(B)也是关于E_1, E_2, E_3的齐次方程.

反过来，设有一点P_0，其坐标x_0, y_0, z_0适合方程(8)，我们来证明：P_0点一定在以三个平面$E_i=0(i=1,\ 2,\ 3)$的交点$V(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$为顶点的锥面上.

因为x_0, y_0, z_0适合(8)，故有$H(E_{10},\ E_{20},\ E_{30})=0$，这里$E_{i0}=a_ix_0+b_iy_0+c_iz_0+d_i(i=1,2,3)$．又$VP_0$的方程是

$$\frac{x-x_0}{\alpha-x_0}=\frac{y-y_0}{\beta-y_0}=\frac{z-z_0}{\gamma-z_0}(=t).$$

于是VP_0上任一点的坐标是$(x_0(1-t)+\alpha t,\ y_0(1-t)+\beta t,\ z_0(1-t)+\gamma t)$．由于$V(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$是$E_i=0(i=1,\ 2,\ 3)$的交点，故有

$$a_i\alpha+b_i\beta+c_i\gamma+d_i=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

将P_0的坐标代入$E_i=0$的左端，并利用上面关系式，即得

$$\begin{aligned}
&a_i[x_0(1-t)+\alpha t]+b_i[y_0(1-t)+\beta t]\\
&\quad+c_i[z_0(1-t)+\gamma t]+d_i\\
&=a_ix_0+b_iy_0+c_iz_0+d_i-t(a_ix_0+b_iy_0+c_iz_0)\\
&\quad+t(a_i\alpha+b_i\beta+c_i\gamma)=E_{i0}(1-t).
\end{aligned}$$

[注] $f(x,\ y,\ z)$是m次$(m>0,xyz\neq0)$齐次函数的定义是：$f(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z)=\lambda^m f(x,\ y,\ z)$，这里$\lambda$是任意常数．例如$x^2\sin\frac{y}{x}+y^2+z^2$是二次齐次函数．如果$f(x,\ y,\ z)$是$m$次齐次函数，则$f(x,\ y,\ z)=0$叫做$m$次齐次方程.

由于 $H(E_1, E_2, E_3)=0$ 是关于 E_1, E_2, E_3 的齐次方程，所以 $H(E_{10}, E_{20}, E_{30})=0$ 是关于 E_{10}, E_{20}, E_{30} 的齐次方程. 根据齐次方程的定义，故有

$$H(E_{10}(1-t), E_{20}(1-t), E_{30}(1-t))=0,$$

这就说明了 VP_0 上的所有点都在曲面(8)上，也就是说 VP_0 在(8)上. 由于 P_0 有许多个，故 VP_0 有许多条. 在曲面(8)上取一条曲线 D，使直线 VP_0 都与 D 相交，这样，曲面(8)就表示以 V 为顶点，D 为准线的锥面，而且 P_0 即在这个锥面上.

从以上两方面的论证即知：(8)是所给锥面的方程，故有

定理 2 以 $F(x, y, z)=0$, $G(x, y, z)=0$ 为准线，三平面 $E_i\equiv a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0\ (i=1, 2, 3)$ 的交点 $V(\alpha, \beta, \gamma)$ 为顶点的锥面方程是(8)，且(8)是关于 $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ 的齐次方程.

定义 关于 $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ 的 n 次齐次方程所表示的锥面叫做以 (α, β, γ) 为顶点的 n 次锥面.

推论 关于 x, y, z 的 n 次齐次方程 $F(x, y, z)=0$ 表示以原点为顶点的 n 次锥面；关于 $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ 的 n 次齐次方程 $F(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)=0$ 表示以 (α, β, γ) 为顶点的 n 次锥面.

【例 5】 求以实的有心常态圆锥截线为准线，以定点为顶点的锥面方程.

解：设准线方程是 $ax^2+by^2=1$, $z=0$，顶点是 (α, β, γ). 母线方程是 $x=\alpha_0+lt$, $y=\beta_0+mt$, $z=\gamma_0+nt$. 由于母线和准线相交，故有

$$a(\alpha+lt)^2+b(\beta+mt)^2=1, \quad \gamma+nt=0.$$

此两方程对 t 有公解，消去 t 后，得

$$a(n\alpha-l\gamma)^2+b(n\beta-m\gamma)^2=n^2.$$

由母线方程得

$$l=\frac{x-\alpha}{t}, \quad m=\frac{y-\beta}{t}, \quad n=\frac{z-\gamma}{t}.$$

在这四个方程中消去 l, m, n, 即得

$$a[\gamma(x-\alpha)-\alpha(z-\gamma)]^2+b[\beta(z-\gamma)-\gamma(y-\beta)]^2 = (z-\gamma)^2,$$

此是关于 $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ 的二次齐次方程, 所以是所求的以 (α, β, γ) 为顶点的锥面方程.

【例 6】 求以原点为顶点; $f(x, y)=0$, $z=k(k\neq 0)$ 为准线的锥面方程。

解: 设母线方程是 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ $(=t)$, 它与准线相交, 则 $f(lt, mt)=0$, $nt=k$. 消去 t, 得 $f\left(\frac{lk}{n}, \frac{mk}{n}\right)=0$, 再消去 l, m, n, 得 $f\left(\frac{xk}{z}, \frac{yk}{z}\right)=0$. 此即所求锥面的方程.

【例 7】 判断

$$P(x-x_0)^2+Q(y-y_0)^2+R(z-z_0)^2=0, \quad PQR\neq 0$$

表示什么曲面?

解: 此方程是关于 $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ 的二次齐次代数方程, 故表示以 (x_0, y_0, z_0) 为顶点的二次代数锥面, 当 P, Q, R 不都同号时, 为实锥面; 当 P, Q, R 同号时, 为虚锥面.

【例 8】 判断

$$(y+z-2)^3+(z+x-2)^3+(x+y-2)^3 -3(y+z-2)(z+x-2)(x+y-2)=0$$

表示什么曲面?

解: 三平面 $y+z-2=0$, $z+x-2=0$, $x+y-2=0$ 有一交点 $(1, 1, 1)$, 且已知方程是 $y+z-2$, $z+x-2$, $x+y-2$ 的

三次齐次代数方程，故它表示以(1, 1, 1)为顶点的三次代数锥面。

由例6容易推出：以原点为顶点，$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=c$ 为准线的锥面方程是

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{cx}{z}\right)^2\pm\frac{1}{b^2}\left(\frac{cy}{z}\right)^2=1,\quad \text{即}\quad \frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

以原点为顶点，$y^2=2px$, $z=c$ 为准线的锥面方程是

$$cy^2-2pzx=0.$$

若在 zx 面上作旋转 $x=\frac{x'-z'}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{x'+z'}{\sqrt{2}}$, $z=z'$, 则得

$$px'^2-cy'^2-pz'^2=0.$$

由以上的讨论得到：以原点为顶点，实的常态二次曲线为准线的锥面方程必然可以写为

$$Px^2+Qy^2+Rz^2=0,\quad PQR\neq 0. \tag{9}$$

这里 P, Q, R 不都同号. (9)式叫做二次代数锥面，当 P, Q, R 不都同号时，为实锥面；都同号时，为虚锥面.

下面由直纹曲面的参数方程推求锥面的参数方程，设准线的参数方程是

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(u)=f(u)\boldsymbol{i}+g(u)\boldsymbol{j}+h(u)\boldsymbol{k}\quad (u_1\leqslant u\leqslant u_2).$$

顶点的位置向量是 $\boldsymbol{P}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$, 故 $\boldsymbol{\tau}(u)=\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{P}_0$ 是母线上的向量，由本章第三节公式(5)，得

$$\begin{gathered}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\rho}(u)+v\boldsymbol{\tau}(u)=\boldsymbol{\rho}(u)(1+v)-v\boldsymbol{P}_0\\ (u_1\leqslant u\leqslant u_2,\ -\infty<v<+\infty).\end{gathered} \tag{10}$$

此即锥面的向量形式的参数方程，化成坐标形式，即有

$$\begin{gathered}x=f(u)(1+v)-vx_0,\ y=g(u)(1+v)-vy_0,\\ z=h(u)(1+v)-vz_0\quad (u_1\leqslant u\leqslant u_2,\ -\infty<v<+\infty).\end{gathered} \tag{11}$$

【例 9】 求以 $x=\frac{1}{t+a}$, $y=\frac{1}{t+b}$, $z=\frac{1}{t+c}$ $(-\infty<t<+\infty,\ t\neq -a,\ -b,\ -c)$ 为准线，$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为顶点的锥面方程.

解：根据(13)得所求锥面方程为

$$x=\frac{1}{t+a}(1+v)-vx_0,\quad y=\frac{1}{t+b}(1+v)-vy_0,$$

$$z=\frac{1}{t+c}(1+v)-vz_0$$

$$(-\infty<t<+\infty;\ t\neq -a,\ -b,\ -c;\ -\infty<v<+\infty).$$

*4·3 劈锥面

现在再介绍一类较简单的直纹曲面.

定义 一直线与定直线相交并始终平行于定平面，且依某种规律而移动，所产生的曲面叫*劈锥面*也叫*楔形曲面*. 定直线如与定平面垂直，则所产生的曲面叫*直角劈锥面*. 与母线移动的轨迹相交的定曲线(通常是平面曲线)叫做*准线*，定直线叫*轴*，定平面叫*准平面*. 图 6-18 即表示以直线 l 为轴、π 为准平面、圆 C 为准线的直角劈锥面. 下面建立劈锥面的方程.

设劈锥面的准线是

$$F(x,\ y,\ z)=0,\ G(x,\ y,\ z)=0. \tag{A}$$

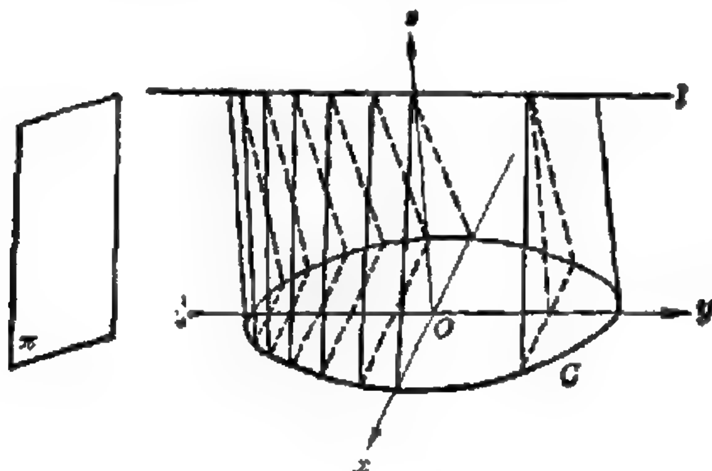


图 6-18

轴是

$$E_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ E_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \qquad \text{(B)}$$

准平面是

$$E \equiv ax+by+cz+d=0. \qquad \text{(C)}$$

于是母线方程可以写作

$$E_1-\lambda E_2=0,\ \ E=\mu. \qquad \text{(D)}$$

这里 λ, μ 是参数. 由于母线 (D) 与准线 (A) 相交,即它们有公共的 x, y, z. 从(A)及(D)的任意三个方程求出 x、y、z, 代入其余一个, 即得

$$H(\lambda,\ \mu)=0. \qquad \text{(E)}$$

于是问题就转化为求适合(E)的双参直线族(D)所产生的直纹曲面. 利用本章第三节的方法,从(D)和(E)消去 λ 和 μ, 得到

$$H\left(\frac{E_1}{E_2},\ E\right)=0. \qquad (12)$$

这就是说,劈锥面上任一点的坐标适合方程(12).

反过来, 设有一点 P_0, 其坐标 x_0, y_0, z_0 适合方程(12), 现在证明: P_0 点一定在母线平行于定平面 E 且与定直线 $E_1=0$, $E_2=0$ 相交的一个劈锥面上.

因为 x_0, y_0, z_0 适合(12),故有 $H\left(\frac{E_{10}}{E_{20}},\ E\right)=0$, 这里 $E_{i0}=a_ix_0+b_iy_0+c_iz_0+d_i$ $(i=1,\ 2)$. 过 P_0 与直线 $E_1=0$, $E_2=0$ 的平面方程是 $E_{20}E_1-E_{10}E_2=0$, 过 P_0 与 E 平行的平面方程是 $E=E_0$. 因此与 $E_1=0$, $E_2=0$ 且与 $E=0$ 平行的直线 l 的方程可以写为

$$\frac{E_1}{E_{10}}=\frac{E_2}{E_{20}},\ E=E_0. \qquad \text{(F)}$$

必须注意: (F) 中的 E_1, E_2 及 E 的 x, y, z 是 l 上动点的坐标. 由于 $H\left(\frac{E_{10}}{E_{20}},\ E_0\right)=0$, 故得 $H\left(\frac{E_1}{E_2},\ E\right)=0$, 这就说明: l 上的所有点都在曲面 (12) 上. 由于 P_0 有许多个,故 l 有许多条,在曲面 (12) 上取一条曲线 D,使与这样的直线 l 都相交,于是(12)就表示以 $E_1=0$, $E_2=0$ 为轴、$E=0$ 为准平面、D 为准线的劈锥面,且 P_0 即在这个劈锥面上.

从以上两方面的论证即知: (12)是所给劈锥面的方程,故有

定理3 以 $F(x,\ y,\ z)=0$, $G(x,\ y,\ z)=0$ 为准线, $E_1\equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $E_2\equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 为轴, $E\equiv ax+by+cz+d=0$

为准平面的劈锥面方程是(12)，但准平面不过轴.

【例 10】 **瓦里斯 (Wallis) 曲面** 求以 z 轴为轴，xy 面为准平面，$y^2+z^2=a^2$，$x+d=0$ 为准线的劈锥面方程，并分别求 $x=-d$，$y=0$，$z=b(a>b>0)$ 所产生的平截线的形状.

解: 母线方程是 $y-\lambda x=0$，$z=\mu$. 如果母线与准线相交，则得 $\lambda^2d^2+\mu^2=a^2$. 从这三个方程消去 λ, μ，得 $d^2y^2=x^2(a^2-z^2)$，此即所求的劈锥面.

$x=-d$ 的平截线是圆 $y^2+z^2=a^2$，$x=-d$；$y=0$ 的平截线是重合直线 $x=0$，$y=0$ 及两条直线 $y=0$，$z\pm a=0$；$z=b$ 的平截线是两直线 $dy=\pm x\sqrt{a^2-b^2}$，$z=b(a>b>0)$.

【例 11】 求以 z 轴为轴，xy 面为准平面，

$$x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ z=\phi(t)\quad(0<t\leqslant 2\pi)$$

为准线的劈锥面的参数方程.

解: 母线方程是 $y-\lambda x=0$，$z=\mu$，与准线相交，得 $\sin v=\lambda\cos v$，$\phi(v)=\mu$. 从这两方程消去 v，得 $\phi(\operatorname{arc\,tg}\lambda)=\mu$，与母线方程消去 λ、μ，得普遍方程 $z=\phi\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\right)$，化成参数方程，得

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=\phi(v)\quad(0<v\leqslant 2\pi,\ -\infty<u<+\infty).$$

也就是

$$\boldsymbol{P}=u\boldsymbol{e}(v)+\boldsymbol{k}\phi(v).$$

注意 1. 当 $\phi(v)=av$ 时，则上面的曲面方程是 $z=a\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$，此即本章第三节例 6 的直角螺旋面.

2. 当 $\phi(v)=a\operatorname{ctg}v+b$ 时，则上面的曲面方程是 $z=\dfrac{ax}{y}+b$ 或 $yz=ax+by$，这表示双曲抛物面(在第七章将详述).

4·4 曲线的投射柱面

已知一条空间曲线及一个平面. 以此平面的法线方向为母线方向，空间曲线为准线，所产生的柱面，叫做这条曲线关于这个平面的投射柱面. 通常取坐标面为定平面. 利用空间曲线的投射柱面可以比较准确地作出曲线的图形，见下面的

例题，先证一个定理。

定理 4 已知空间曲线

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0.$$

则从两方程中消去 z，即得出它关于 xy 面的投射柱面的方程。

【证】 我们推求以已知曲线为准线，z 轴方向为母线方向的柱面方程。设 (x_0, y_0, z_0) 是已知曲线上一点，则

$$F(x_0, y_0, z_0)=0, \quad G(x_0, y_0, z_0)=0. \tag{A}$$

过此点的母线方程是

$$x=x_0, \quad y=y_0. \tag{B}$$

将(B)代入(A)，得 $F(x, y, z_0)=0$, $G(x, y, z_0)=0$，从这两方程消去 z_0，也即从已知两方程消去 z，则得到所求投射柱面的方程。】

【例 12】 求维维安尼曲线(本章第二节例 2)关于三个坐标面的投射柱面。

解：1. 从 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ 中消去 z，即得关于 xy 面的投射柱面 $x^2+y^2=ax$. 这是一个直圆柱面(图 6-19)。

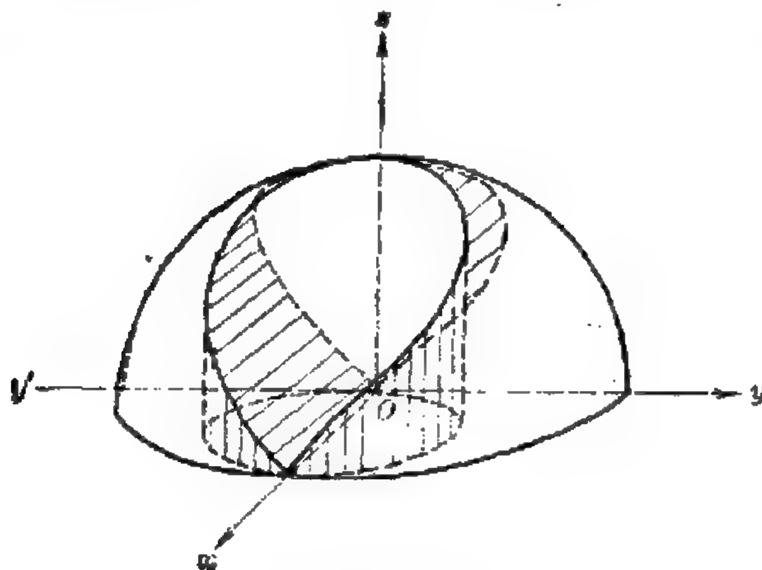


图 6-19

2．由已知两方程相减得 $z^2=a(a-x)$，此即关于 zx 面的投射柱面，这是一个抛物柱面(图 6-19)．

3．由 $z^2=a(a-x)$ 与 $y^2=x(a-x)$ 相除，得 $x=\frac{ay^2}{z^2}$，再代入 $z^2=a(a-x)$ 中，得 $z^4=a^2(z^2-y^2)$ 这是关于 yz 面的投射柱面(图 6-19)．

一般地说，任意两个投射柱面的交线即表示原曲线，但对例 12 中的曲线用球面和在 xy 面上的投射柱面来表示则比较容易看出它的形状．

由上可见，已知空间一条曲线的方程时，可以推出它关于三个坐标面的投射柱面的方程．于是可以选取两个比较简单的投射柱面的方程作为这条曲线的方程．因此在描绘某条曲线时，就可以描绘这两个柱面的交线(在画法几何上将这交线称为贯线)．现举例说明作图的方法．

【例 13】 求作二柱面 $x^2+y^2-2x=0$，$x^2+z^2-4=0$ 的交线．

解：先作出各柱面与其母线所垂直的坐标面的交线(图 6-20)．然后取一平面，使与 x 轴(即与二柱面母线都不平行

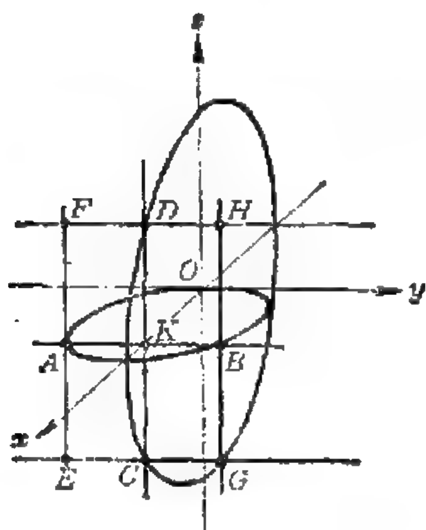
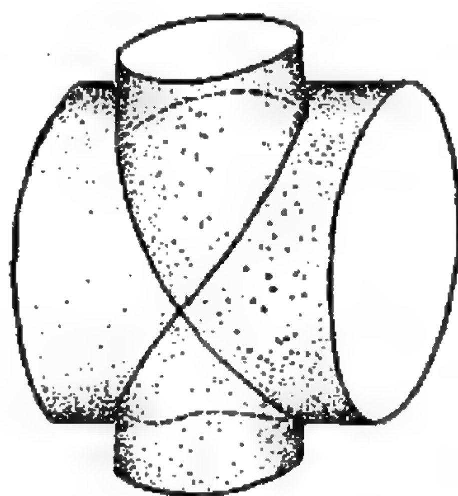


图 6-20


图 6-21

的轴)垂直. 设此平面的方程为 $x=k$, 它与 x 轴的交点为 K. 此平面与坐标面上的交线交于 A、B、C、D 四点. 且过每点必有一对应柱面的母线通过, 此四条母线都在平面 $x=k$ 上. 四条母线的交点 E、F、G、H 也是二柱面交线上的四点. 如令平面 $x=k$ 取不同的位置, 即可得出足够的点以作出曲线(图 6-21).

【例 14】 求曲线 $2x^2+z^2+4y=4z$, $x^2+3z^2-8y=12z$ 关于三个坐标面的投射柱面,并作此曲线.

解: 从已知方程分别消去 x, y, z, 即得曲线关于三个坐标面的投射柱面, 它们分别是

$$z^2-4y=4z,$$
$$x^2+z^2=4z,$$
$$x^2+4y=0.$$

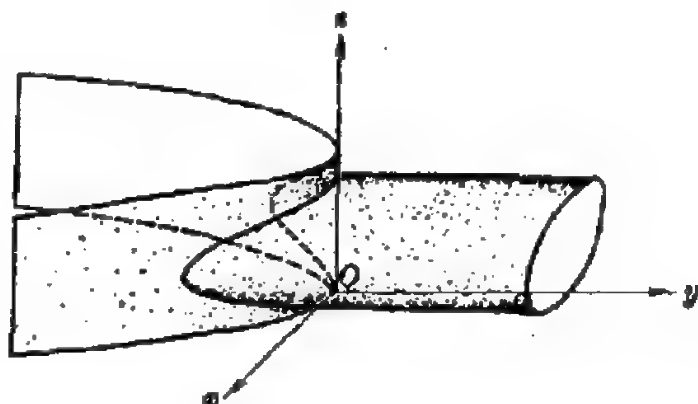


图 6-22

图 6-22 表示第二与第三两个柱面所相交的原曲线,它的画法与例 13 的方法相似.

*4·5 直圆锥面的平截线

在平面解析几何里, 我们将椭圆、双曲线和抛物线叫做圆锥截线, 这是因为它们都是直圆锥面的平截线. 下面就证明这个论断.

设有以 O 为顶点, OA 为轴, 半顶角为 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$的直圆锥面 K, 又有一平面 π. 现在讨论 K 与 π 的交线 C 的形状.

以 O 为原点,过原点向 π 所作的垂线为 z 轴. 在 AOz 面上作 y 轴, 使 $\angle yOA=\theta$, 适合 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, 然后再作 x 轴, 使 $Oxyz$ 成右手系(图 6-23). 因此 $\angle zOA=\frac{\pi}{2}-\theta$, 故 OA 的方向余弦是 0, $\cos\theta$, $\sin\theta$.

设 $P(x, y, z)$ 为 K 上任意一点，则过 P 且与 OA 垂直的平面方程是

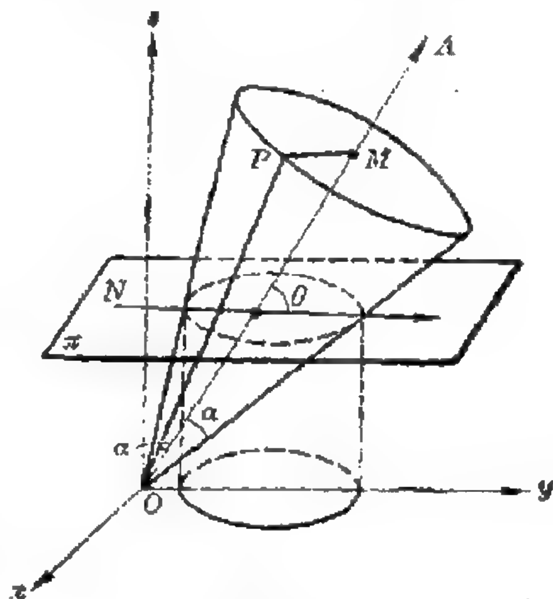


图 6-23

$$(Y-y)\cos\theta+(Z-z)\sin\theta=0,$$

此平面与 OA 的交点是 M，则 $\overline{OM}^2=(y\cos\theta+z\sin\theta)^2$，但 $\overline{OM}^2=\overline{OP}^2\cos^2\alpha$，故得 K 的方程是

$$(x^2+y^2+z^2)\cos^2\alpha=(y\cos\theta+z\sin\theta)^2. \qquad (A)$$

设 π 与 z 轴的交点为 N，且设 $ON=p$，则 π 的方程是

$$z=p. \qquad (B)$$

因此 π 所产生的平截线 C 的方程是 (B) 与

$$(x^2+y^2+p^2)\cos^2\alpha=(y\cos\theta+p\sin\theta)^2,$$

或

$$x^2\cos^2\alpha+y^2(\cos^2\alpha-\cos^2\theta)-2py\sin\theta\cdot\cos\theta+p^2(\cos^2\alpha-\sin^2\theta)=0 \qquad (C)$$

的交线，这里 (C) 表示母线平行于 z 轴的一个柱面，它与 xy 面的交线是一圆锥截线，即交线 C，现在将 (C) 当作 xy 面上的平面曲线而加以研究。由于[注]

$$I_2=\cos^2\alpha(\cos^2\theta-\cos^2\alpha),$$

$$I_3=\begin{vmatrix}\cos^2\alpha & 0 & 0\\ 0 & \cos^2\alpha-\cos^2\theta & -p\sin\theta\cos\theta\\ 0 & -p\sin\theta\cos\theta & p^2(\cos^2\alpha-\sin^2\theta)\end{vmatrix}=-p^2\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha.$$

1. 如果 $p\neq 0$，则 $I_3\neq 0$，故 (C) 为常态圆锥截线。

(1) 当 $I_2=0$，即 $\cos\theta=\cos\alpha$ 或 $\theta=\alpha$，则 (C) 表示抛物线，此时 y 轴在 K 上，且与 π 平行。因此 π 与一条母线平行时，则平截线是抛物线。

(2) 当 $I_2>0$，即 $\cos\theta>\cos\alpha$ 或 $\theta<\alpha$，则 (C) 表示双曲线，此时 y 轴在 K 的内部。因此 π 与两个半锥面都相交时，则平截线是双曲线。

(3) 当 $I_2<0$，即 $\cos\theta<\cos\alpha$ 或 $\theta>\alpha$，且 $I_1=2\cos^2\alpha-\cos^2\theta$ 与

[注] 参看吴光磊：《解析几何》第五章。

I_3 反号，则(C)表实椭圆，此时 y 轴在 K 的外部，因此 π 只与一个半锥面相交时，则平截线是椭圆。

2. 如果 $p=0$，则 $I_3=0$，故(C)为变态圆锥截线，且(C)变为

$$x^2\cos^2\alpha+y^2(\cos^2\alpha-\cos^2\theta)=0.$$

(1) 当 $\theta<\alpha$ 时，(C)表示两相交直线。

(2) 当 $\theta=\alpha$ 时，(C)表示两重合直线。

(3) 当 $\theta>\alpha$ 时，(C)表示两条虚直线或原点。

习 题 6·4

1. 求以 $y^2=2px$, $z=0$ 为准曲线，(1) l, m, n 为母线方向数的柱面方程；(2) (x_0, y_0, z_0) 为顶点的锥面方程。

2. 求以 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 为准曲线，(1) l, m, n 为母线方向数的柱面方程；(2) (x_0, y_0, z_0) 为顶点的锥面方程。

3. 求证下列曲面为柱面，并求母线方向，且作(1)、(2)的图：

   (1) $y^2=1-x$;　　(2) $x=\sin y$;

   (3) $y^2=1-x^4$;　　(4) $(x+y+z)^2=(x-y-z)^3$;

   (5) $(x-z)^2+(y+z-a)^2=a^2$.

4. 求证下列曲面为通过三条坐标轴的锥面，且求顶点的坐标：

   (1) $yz+zx+xy=0$;

   (2) $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3=0$.

5. 说明下列曲面的形状：

   (1) $(y+z-x-1)^2-(z+x-y-1)^3=0$;

   (2) $(y+z-x-1)^3=(z+x-y-1)^2(x+y-z-1)$;

   *(3) $\left(\dfrac{y+z-x-1}{z+x-y-1}\right)^2=(x+y-z-1)^3$.

6. 求与 x 轴及 $z=k$ 等距的点的轨迹方程，并说明它的形状。

7. 说明第一章第一节例 7 的轨迹的形状。

8. 求下列曲线关于三个坐标面的投射柱面，并选用其中两个，以作该曲线：

   (1) $x^2+y^2+z^2=25$, $x^2+4y^2-z^2=0$;

(2) $x^2-y^2-z-1=0,\ x^2-y^2-z+1=0$.

9. 求证 $g\left(y-\frac{m}{l}x,\ z-\frac{n}{l}x\right)=0,\ l\neq0$ 表示以 $l,\ m,\ n$ 为母线方向数，$g(y,\ z)=0,\ x=0$ 为准线的柱面方程.

10. 求证 $f\left(\frac{zx_0-xz_0}{z-z_0},\ \frac{zy_0-yz_0}{z-z_0}\right)=0$ 表示以 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为顶点，$f(x,\ y)=0,\ z=0$ 为准线的锥面方程.

11. 如果直线 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ 是以原点为顶点的锥面 $F(x,\ y,\ z)=0$ 的母线，则 $F(l,\ m,\ n)=0$；反之，如过直线 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ 的方向数适合齐次方程 $F(l,\ m,\ n)=0$，则它必是锥面 $F(x,\ y,\ z)=0$ 的母线.

*12. 以 $(a,\ b,\ c)$ 为顶点的锥面与 yz 面的交线是 $F(y,\ z)=0,\ x=0$. 求证它与 zx 面的交线是 $F\left(\frac{bx}{x-a},\ \frac{cx-az}{x-a}\right)=0,\ y=0$. [提示：先以交线为准线，作出锥面方程.]

13. 求以 $y=0$ 为准平面；$z=a,\ x=0$ 为轴；$x^2+y^2=r^2,\ z=0$ 为准线所产生的劈锥面方程，并作图.

14. 求与两抛物线 $y^2=a^2x,\ z=0$ 及 $z^2=b^2x,\ y=0$ 都相交且与平面 $b^2y^2=a^2z^2$ 中的任何一个相平行的动直线所产生的曲面方程.

*15. 求与两异面直线都相交且与一定平面平行的动直线所产生的曲面.

*16. 过 x 轴与 y 轴分别作动平面，使它们的交角为 α. 求证它们的交线产生锥面 $z^2(x^2+y^2+z^2)=x^2y^2\operatorname{tg}^2\alpha$.
[提示：利用第 11 题.]

第五节　旋转曲面

5·1　旋转曲面的普遍方程

本节讨论曲线根据某种规律运动所产生的另一类曲面.

已知一曲线与一直线. 以此直线为旋转轴，将曲线绕轴

旋转，则所产生的曲面叫做旋转曲面，这直线叫做旋转轴，所旋转的曲线叫做母曲线．当母曲线是平面曲线，且轴在这曲线所在的平面上时，以轴为界的半平面叫做经平面，它与曲面的交线叫做经线（子午线）；与轴垂直的平面叫做纬平面，它与曲面的交线叫做纬线（平行圈）．显然，旋转曲面的经线关于旋转轴是对称的，且所有经线都相同，而纬线则是以轴为联心线的一组圆．

下面建立旋转曲面的方程．

设旋转曲面的母曲线是

$$F(x,\ y,\ z)=0,\qquad G(x,\ y,\ z)=0. \tag{A}$$

旋转轴是

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}. \tag{B}$$

现在取一圆族，它们的圆心在(B)上，且圆所在的平面与(B)垂直，则此圆族方程可以写作

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,\\ lx+my+nz=p.\end{cases} \tag{C}$$

这里 $r,\ p$ 是参数．于是这旋转曲面可以看作是永远沿(A)相交的圆族(C)所产生．由于(C)与(A)相交，即它们有公共的 $x,\ y,\ z$．从(A)及(C)四个方程中任意取三个，求出 $x,\ y,\ z$，代入其余一个，即得

$$H(r,\ p)=0. \tag{D}$$

于是问题即转化为求双参数的圆族依条件(D)移动而产生的曲面．从(C)及(D)消去 r 及 p，得

$$H\left(\pm\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},\ lx+my+nz\right)=0. \tag{1}$$

这就是说，旋转曲面上任一点的坐标适合方程(1)．

反之，设有一点 P_0，其坐标 x_0, y_0, z_0 适合方程(1)，现在证明：P_0 点一定在以(B)为旋转轴所产生的旋转曲面上.

因为 x_0, y_0, z_0 适合(1)，故有

$$\begin{aligned}H(\pm\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2},\\ lx_0+my_0+nz_0)=0.\end{aligned} \tag{E}$$

过 P_0 与直线(B)垂直的平面是 $lx+my+nz=lx_0+my_0+nz_0$，以 (a, b, c) 为球心，过 P_0 的球面是 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2$. 因此

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\\ \quad=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2\\ lx+my+nz=lx_0+my_0+nz_0\end{cases} \tag{F}$$

表示过 P_0 的圆 K，且圆所在的平面与(B)垂直. 必须注意：(F)中的 x, y, z 是 K 上动点的坐标. 由(E)可得方程(1)，这就说明 K 上的所有点都在曲面(1)上. 由于 P_0 有许多个，故 K 有许多个. 过轴任作半平面与(1)相交成一条曲线 L，则 L 必与这样的圆 K 都相交，于是(1)就表示以(B)为轴、L 为母曲线的旋转曲面，且 P_0 即在这个旋转曲面上.

从以上两方面的论证即知：(1)是所给旋转曲面的方程，故有

定理 1 以 $F(x, y, z)=0$, $G(x, y, z)=0$ 为母曲线，$\dfrac{x-a}{l}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-c}{n}$ 为轴的旋转曲面方程是(1).

推论 1 以 $f(x, z)=0$, $y=0$ 或 $f(y, z)=0$, $x=0$ 为母曲线，z 轴为旋转轴所产生的旋转曲面方程是

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0. \tag{2}$$

推论 2 曲面

$$g(\pm\sqrt{y^2+z^2}, x)=0 \tag{3}$$

表示以 $g(z, x)=0$, $y=0$ 或 $g(y, x)=0$, $z=0$ 为母曲线, x 轴为旋转轴的旋转曲面.

推论 3 曲面

$$h(\pm\sqrt{z^2+x^2},\ y)=0 \tag{4}$$

表示以 $h(z, y)=0$, $x=0$ 或 $h(x, y)=0$, $z=0$ 为母曲线, y 轴为旋转轴的旋转曲面.

注意 利用(2), 半圆 $z=-\sqrt{1-x^2}$, $y=0$ 以 x 轴为旋转轴产生两个曲面块:

$$\sqrt{y^2+z^2}=-\sqrt{1-x^2} \quad 和 \quad \sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{1-x^2},$$

前者无意义, 后者是球面

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

因此, 可看出(2)中正负号的作用.

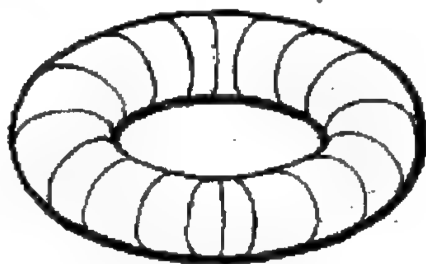


图 6-24

【例 1】 环面 求以 y 轴为旋转轴, 母曲线为圆

$$(x-a)^2+y^2=b^2, \quad z=0 \quad (a>b>0)$$

所产生的旋转曲面.

解: 由于母曲线是 $x^2+y^2-2ax+a^2-b^2=0$, $z=0$, 利用推论 1, 所产生的旋转曲面方程是

$$(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2+y^2-2a(\pm\sqrt{x^2+z^2})+a^2-b^2=0.$$

化简得 $$(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2=4a^2(x^2+z^2).$$

此为四次曲面, 它的形状如图 6-24 所示.

【例 2】 求以 y 轴为旋转轴, 母曲线为正弦曲线弧

$$z=\sin y, \quad x=0 \quad (-\pi\leqslant y\leqslant\pi)$$

所产生的旋转曲面.

解: 利用推论 1, 所产生的旋转曲面方程是

$$\pm\sqrt{x^2+z^2}=\sin y \quad (-\pi\leqslant y\leqslant\pi),$$

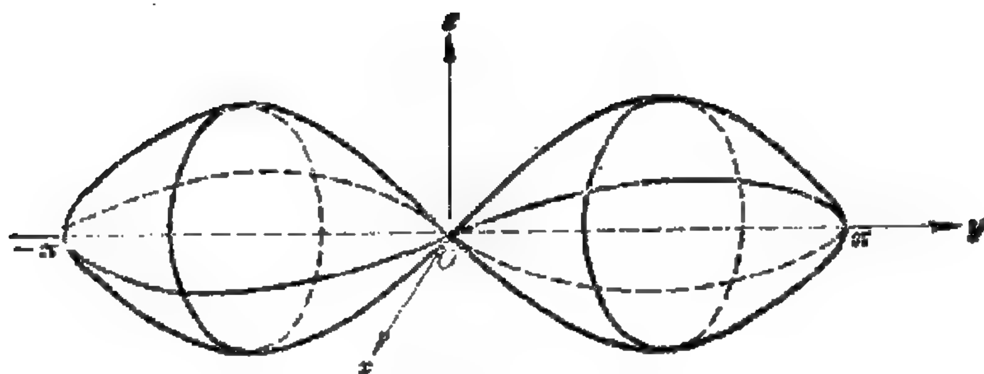


图 6-25

即 $x^2+z^2=\sin^2 y$，形状见图 6–25.

【例 3】 求以 $x=y=z$ 为旋转轴，xy 面上一条平分角线为母线所产生的旋转曲面.

解：母线是

$$x=y,\quad z=0;\tag{A}$$

动圆是

$$x+y+z=p,\quad x^2+y^2+z^2=r^2.\tag{B}$$

由于(A)与(B)相交，故将(A)代入(B)，得 $2x=p$，$2x^2=r^2$，消去 x，即得 $2r^2=p^2$. 故得所求旋转曲面是

$$2(x^2+y^2+z^2)=(x+y+z)^2,$$

即

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=0.$$

这表示以原点为顶点的锥面.

【例 4】 求证 $(y^2+z^2)(1+x^2)^2=1$ 是旋转曲面.

【证】 1. 以 $y^2(1+x^2)^2=1$，$z=0$ 或以 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$，$z=0$ 为母曲线，x 轴为旋转轴，可得已知曲面(见图 6–26).

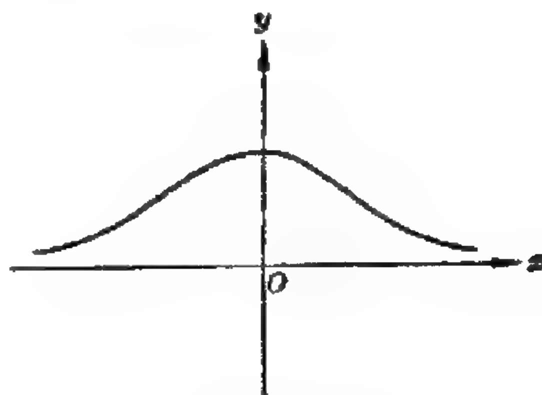


图 6-26

2. 以 $z^2(1+x^2)^2=1$，$y=0$ 或以 $z=\dfrac{1}{1+x^2}$，$y=0$ 为母曲

线，x 轴为旋转轴也可得已知曲面(见图 6-27)．

这曲面的形状如图 6-28．】

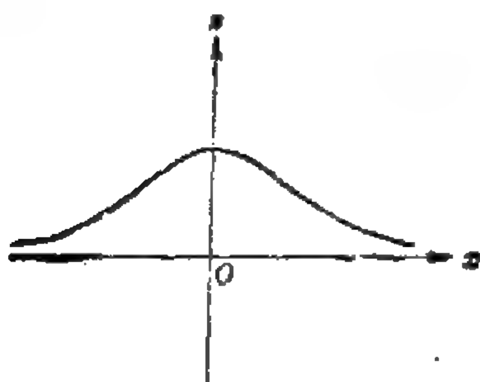


图 6-27

【例5】 求证 $x^2+y^2+z^2-2a(yz+zx+xy)=b^2$ 表示一个旋转曲面．

【证】 将已知方程写成

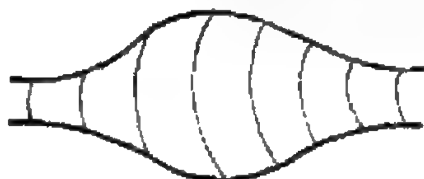


图 6-28

$$x^2+y^2+z^2-a[x^2+y^2+z^2+2(yz+zx+xy)]$$
$$+a(x^2+y^2+z^2)=b^2.$$

即
$$(a+1)(x^2+y^2+z^2)-a(x+y+z)^2=b^2.$$

将此式与(1)式比较，可以看出：已知方程表示以 $x=y=z$ 为旋转轴的旋转曲面．】

5·2 旋转曲面的参数方程

设有母曲线

C: $\quad x=f(t),\quad y=g(t),\quad z=h(t)\quad (t_1\leqslant t\leqslant t_2).$

现求以 z 轴为旋转轴所产生的旋转曲面(图 6-29)．设 $P(x, y, z)$ 是曲面上的一点，那么它一定是由 C 上某一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 旋转而得．设 (ρ, θ, u) 与 (ρ_0, θ_0, u_0) 分别是 P 及 P_0 的柱坐标，显然有

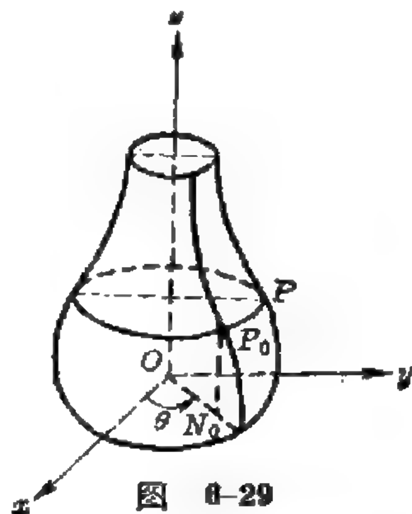


图 6-29

$$\rho=\rho_0=\sqrt{[f(t_0)]^2+[g(t_0)]^2},$$
$$u=u_0=h(t_0).$$

于是 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta=\sqrt{[f(t_0)]^2+[g(t_0)]^2}\cdot\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta=\sqrt{[f(t_0)]^2+[g(t_0)]^2}\cdot\sin\theta, \\ z=u=h(t_0). \end{cases}$

当 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, $0<\theta\leqslant 2\pi$, 即得所求旋转曲面的方程

$$\begin{cases} x=\sqrt{[f(t)]^2+[g(t)]^2}\cdot\cos\theta, \\ y=\sqrt{[f(t)]^2+[g(t)]^2}\cdot\sin\theta, \\ z=h(t). \end{cases} \tag{5}$$

将(5)写成向量形式, 则有

$$\boldsymbol{P}=\sqrt{[f(t)]^2+[g(t)]^2}\boldsymbol{e}(\theta)+\boldsymbol{k}h(t). \tag{6}$$

故有

定理2 以 $x=f(t), y=g(t), z=h(t)$ 为母曲线, z 轴为旋转轴所产生的旋转曲面的坐标形式是(5), 向量形式是(6).

【例6】 用公式(5)推求环面的参数方程.

解: 将 yz 面上的圆 $(y-a)^2+z^2=b^2, x=0$ 化成参数方程, 得

$$x=0,\quad y=a+b\cos t,\quad z=b\sin t\quad (0<t\leqslant 2\pi).$$

用公式(5)得

$$x=(a+b\cos t)\cos\theta,\qquad y=(a+b\cos t)\sin\theta,$$
$$z=b\sin t\quad (0<\theta,\ t\leqslant 2\pi).$$

【例7】 设 l_1 及 l_2 是两条异面直线, 求 l_2 绕 l_1 所产生的旋转曲面.

解: 取 l_1 为 z 轴, l_1 与 l_2 的公垂线为 x 轴, 再适当取 y 轴而建立坐标系. 设 l_2 与 x 轴的交点是 $(a, 0, 0)$ $(a\neq 0)$, 且方向数是 $(0, 1, b)$ $(b\neq 0)$ 于是 l_2 的参数方程是

$$x=a,\quad y=t,\quad z=bt\quad (-\infty<t<+\infty).$$

故得旋转曲面的参数方程是

$$x=\sqrt{a^2+t^2}\cos\theta,\quad y=\sqrt{a^2+t^2}\sin\theta,\quad z=bt$$

$$(-\infty<t<+\infty,\quad 0<\theta\leqslant 2\pi).$$

消去参数，得所求的曲面方程是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{a^2b^2}=1.$$

5·3 二次旋转曲面

1. 旋转椭圆面

(1) 球面 由一个圆以它的直径为旋转轴旋转而得. 将圆 $x^2+y^2=r^2$, $z=0$ 绕 x 轴（或 y 轴）旋转，即得球面

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

(2) 长球面 由一椭圆以它的长轴为旋转轴旋转而得. 将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0(a>b)$ 绕 x 轴旋转即得长球面（见图 6-30）

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

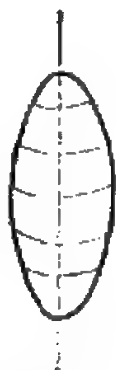


图 6-30

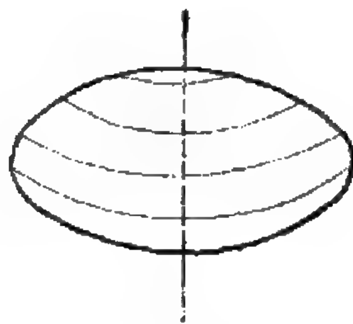


图 6-31

(3) 扁球面 由一椭圆以它的短轴为旋转轴旋转而得. 将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0(a>b)$ 绕 y 轴旋转即得扁球面（见图 6-31）

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

2. 旋转双曲面

(1) 旋转单叶双曲面　由一双曲线以它的虚轴为旋转轴旋转而得. 将双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ 绕 y 轴旋转即得旋转单叶双曲面(见图 6-32)

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

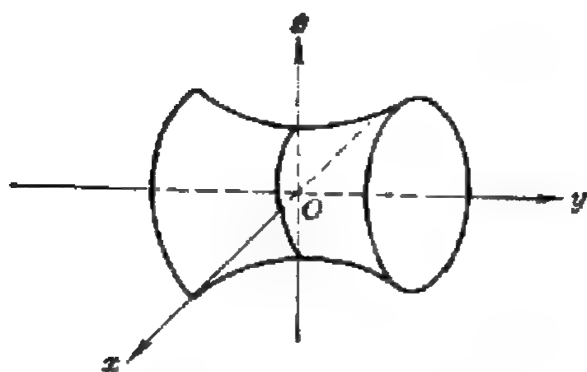


图 6-32

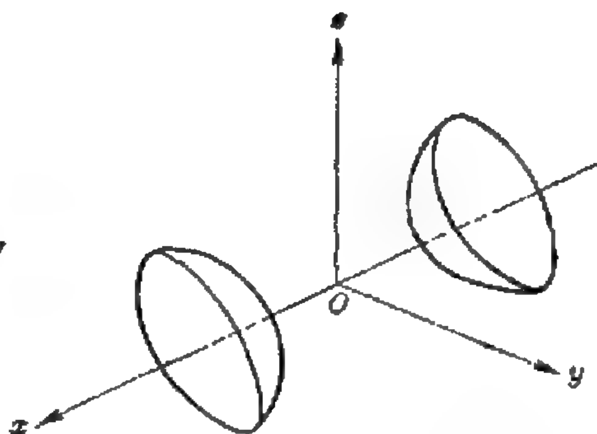


图 6-33

(2) 旋转双叶双曲面　由一双曲线以它的实轴为旋转轴旋转而得. 将双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ 绕 x 轴旋转即得旋转双叶双曲面(见图 6-33)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

3. 旋转抛物面　由一抛物线以它的主轴为旋转轴旋转而得. 将抛物线

$$y^2=2px,\quad z=0$$

绕 x 轴旋转即得旋转抛物

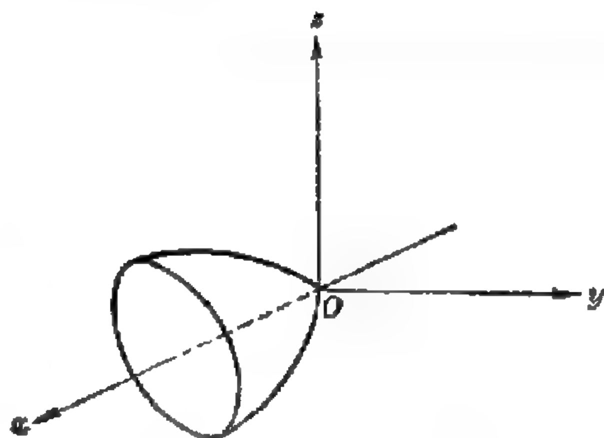


图 6-34

面(见图 6-34)

$$y^2+z^2=2px.$$

4. 旋转圆柱面(直圆柱面) 有两平行线，以其中一直线为旋转轴，另一直线围绕它旋转而得. 直线 $x=a,\ z=0$ 绕 y 轴旋转即得旋转圆柱面

$$x^2+z^2=a^2.$$

5. 旋转圆锥面(直圆锥面) 两相交直线，以其中一直线为旋转轴，另一直线围绕它旋转而得. 将直线 $y=mx,\ z=0$ 绕 x 轴旋转即得旋转圆锥面

$$y^2+z^2=m^2x^2.$$

习 题 6·5

1. 求以 x 轴或 y 轴为旋转轴，下列曲线为母曲线所产生的旋转曲面:

   (1) $x-y=0,\ z=0$;　　(2) $y=e^x,\ z=0$;

   (3) $\rho^2=a^2\cos 2\theta,\ z=0$.

2. 求以 y 轴为旋转轴，下列曲线为母曲线所产生的旋转曲面:

   (1) $y^2=-x,\ z=0$;　　(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{2hx}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,\ z=0$.

3. 求证 $y^2+z^2=(ax^2+bx+c)^2$ 表示旋转曲面，且求母曲线及旋转轴.

4. 求悬链线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a},\ z=0$ 即 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}),\ z=0$ 以 x 轴为旋转轴所产生的旋转曲面(悬链面). 且作其图.

5. 求曳物线

   $$x=0,\ y=a\sin t,\ z=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\ (a>0,\ 0\leqslant t\leqslant\pi)$$

   以 z 轴为旋转轴所产生的旋转曲面(拟球面).

6. 说明习题 5.2 第 5 题中的两个曲面的形状.

7. 求以 z 轴为旋转轴,

   $$x=t,\ \ y=t^2,\ \ z=t^3\ \ (-\infty<t<+\infty)$$

为母曲线所产生的旋转曲面.

*8. 求证到两垂直直线的距离平方和是常数的点的轨迹是一个旋转椭圆面.

[提示: 以两垂直直线作 x 轴及 y 轴.]

*9. 求证到定直线及定直线上一定点的距离平方和是常数的点的轨迹是一旋转椭圆面.

[提示: 以定直线作 x 轴, 定点为原点.]

*10. 求证 $yz+zx+xy=a^2$ 是旋转曲面, 且求旋转轴.

$\left[\text{提示: 两端都加} \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2).\right]$

本章提要

1. 曲面方程的建立

(1) 直译几何条件法　利用点的轨迹建立曲面方程;

(2) 消参数法　利用曲线族建立曲面方程.

2. 三种常见的二次旋转曲面

(1) 球面　用球心和半径建立方程

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0,\quad u^2+v^2+w^2-d>0$$

表示球面;

(2) 直圆柱面　用轴和底半径建立方程

$$x^2+y^2=a^2$$

表示直圆柱面;

(3) 直圆锥面　用轴和半顶角建立方程

$$x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\theta$$

表示直圆锥面.

3. 一般的直纹曲面

(1) 用母线及准曲线建立方程; (2) 参数方程.

4. 简单的直纹曲面

(1) 柱面　用母线方向及准曲线建立方程

$H(x, y)=0$ 表示以 z 轴方向为母线方向的柱面方程; $H(E_1, E_2)$

$=0$ 表示以 $E_1=0$, $E_2=0$ 为母线方向的柱面方程，其中

$$E_i \equiv a_i x+b_i y+c_i z+d_i \quad (i=1,\ 2).$$

(2) 锥面　用顶点及准曲线建立方程

$H(x-\alpha,\ y-\beta,\ z-\gamma)=0$ 表示以$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$为顶点的锥面方程，其中 $H(x-\alpha,\ y-\beta,\ z-\gamma)$ 是 $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ 的齐次函数; $H(E_1,\ E_2,\ E_3)=0$ 表示以三个相交的平面 $E_i=0$ 的交点为顶点的锥面方程，其中 $H(E_1,\ E_2,\ E_3)$是 E_1, E_2, E_3 的齐次函数，且

$$E_i \equiv a_i x+b_i y+c_i z+d_i \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

(3) 劈锥面　用轴、准平面及准曲线建立方程

$H\left(\dfrac{E_1}{E_2},\ E\right)=0$ 表示以 $E=0$ 为准平面、$E_1=0$, $E_2=0$ 为轴的劈锥面方程，其中 $E\equiv ax+by+cz+d$, $E_i\equiv a_i x+b_i y+c_i z+d_i \quad (i=1,\ 2)$.

5. 旋转曲面

(1) 用母曲线及旋转轴建立方程

$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$ 表示以 z 轴为旋转轴的旋转曲面；母曲线是 $f(x,\ z)=0$, $y=0$ 或 $f(y,\ z)=0$, $x=0$.

$$H(\pm\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},\ lx+my+nz)=0$$

表示以 $\dfrac{x-a}{l}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-c}{n}$ 为旋转轴的旋转曲面.

(2) 五类二次旋转曲面.

复 习 题 六

1. 求证曲线 $x=3\sin t$, $y=4\sin t$, $z=5\cos t\ (0\leqslant t<2\pi)$表示一圆，并求该圆的中心和半径以及圆所在的平面方程.
2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 与(1)柱面 $x^2+y^2=a^2$, $r>a$; (2)锥面 $x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\theta$ 的交线的参数方程，并说明其形状.
3. 求两柱面 $x^2+y^2=a^2$, $x^2-y^2=b^2\ (a>b>0)$的交线的参数方程，并说明其形状.
4. 求曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3(-\infty<t<+\infty)$在三个坐标面上的投射柱面.

5. 证明曲线 $y^2+z^2=a^2$, $z^2-x^2=a^2$ 是两个椭圆，并作落在第一卦限内的图形.

6. 讨论下列参数方程表示什么曲面?

(1) $x=u$, $y=v$, $z=\sqrt{1-u^2-v^2}$　$(u^2+v^2\leqslant 1)$;

(2) $x=a\cos u$, $y=b\sin u$; $z=v$ $(0\leqslant u<2\pi,\ -\infty<v<+\infty)$.

7. 求证球面上两点处切面的交线必与这两点联线垂直.

8. 过定点的动平面与坐标轴交于三点. 过此三点及原点作球面，求证球心轨迹是一个三次曲面.

9. 过定直线的动平面与坐标轴交于三点. 过此三点及原点作球面，求证球心轨迹是空间三次曲线.

*10. 求证过一定点，而球心在定直线上的诸球面必过三定点.

[提示: 以定直线为 x 轴，定点为(a, b, c).]

11. 两个直圆锥面的顶点分别是$(0, 0, c)$和$(0, 0, c')$，且它们的轴交于$(k, 0, 0)$. 又这两锥面都过 z 轴，则它们的交线是一平面曲线，且在平面$2cc'z=k(c+c')x$ 上.

12. 求证从原点到球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 作切线必产生直圆锥面.

*13. 求过三坐标轴的直圆锥面的方程

[提示: 过$(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$; $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$; $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$; $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, -1)$分别作圆共有四个直圆锥面.]

*14. 求证过三条不共面但共点的直线可作一个直圆锥面.

[提示: 存在一直线与这三条直线成等角.]

*15. 求证球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与曲面 $2(x^4+y^4+z^4)=a^4$ 的交线是四个圆.

[提示: 用公式 $x^4+y^4+z^4-2y^2z^2-2z^2x^2-2x^2y^2=-(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$.]

*16. 在一个球内有一定点 P，球面上有三个动点 A, B, C，且 $\angle BPC=\angle CPA=\angle APB=90°$，以 PA, PB, PC 为棱作一平行六面体，点 Q 是六面体上与 P 斜对的一个顶点. 当 A, B, C 在球面上移动时，求点 Q 的轨迹.

17. 判断 $z=(x+y)^2$ 表示什么曲面？并求它的参数方程.

18. 求证 $ax^2+by^2+bz^2+2byz+2czx+2cxy+2dx+2dy+2dz+e=0$ 表示一柱面，它的母线方向是 $y+z=0$, $x=0$ 的方向.

19. 求以 x 轴为轴，yz 面为准平面，$y^2=cz$, $x=y$ 为准曲线的劈锥面.

20. 求证(1) $y^2z=4acx$; (2) $yz^3=ax^3$ 都是劈锥面，并指出它们的形状.

21. 求与 $y=0$, $z=c$ 及 $y^2=4ax$, $z=0$ 都相交，且与平面 $x=0$ 平行的直线所产生的曲面.

22. 求与三直线 $y=b$, $z=-c$; $z=c$, $x=-a$; $x=a$, $y=-b$ 都相交的直线所产生的曲面.

23. 求以 x 轴或 y 轴为旋转轴，$y^3=ax^2$, $z=0$ 为母曲线所产生的旋转曲面.

24. 求以 $xy=a^2$, $z=0$ 为母曲线，以它的渐近线为旋转轴所产生的旋转曲面.

25. 求以 z 轴为旋转轴，$x=f(z)$, $y=g(z)$ 为母曲线所产生的旋转曲面.

26. 已知旋转抛物面 $x^2+y^2=2pz$, 求(1)经线；(2)纬线；(3)它和平面 $z=ax+by+c$ 的交线在 xy 面上的投射柱面.

27. 求证平面 $6x-10y-7z=0$ 和锥面 $108x^2-20y^2-7z^2=0$ 相交，且求两条交线的交角.

*28. 求证平面 $ax+by+cz=0$ 与锥面 $yz+zx+xy=0$ 相交时，两条交线互相垂直的充要条件是 $bc+ca+ab=0$.

[提示：利用二次方程根与系数的关系.]

*29. 求平面 $lx+my+nz=0$ 与两个锥面 $fyz+gzx+hxy=0$, $ax^2+by^2+cz^2=0$ 的交线重合的充要条件.

30. 说明下列方程所表示的曲面形状：

(1) $f(x, y)=0$; (2) $z=f(y-ax)$;

(3) $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$; (4) $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$;

(5) $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$; (6) $\phi(x-az, y-bz)=0$;

(7) $\phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0$; (8) $\phi(x^2+y^2+z^2)=ax+by+cz$.

思 考 题 六

1. 分别研究点、直线、平面和直圆柱面、直圆锥面的相关位置.

2. 求证 $x^3+y^3+z^3-3xyz=a^3$ 是旋转曲面,并求旋转轴和母曲线.

3. 求以 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 为旋转轴, $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(u)$ $(u_1\leqslant u\leqslant u_2)$为母曲线所产生的旋转曲面.

4. 一曲线沿另一曲线平移而得的曲面叫**平移曲面**. 试建立它的方程.

第七章

二 次 曲 面

本章首先介绍五种二次曲面的标准方程，它们都是由二次曲线按不同的运动规律所产生的．然后根据方程研究它们的形状及一些性质．最后就二次曲面的标准方程作一小结．

第一节 有心二次曲面

1·1 椭圆面

我们已经知道，以 z 轴为旋转轴，旋转 zx 面上的椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \ y=0 \quad (a,\ c>0)$$

所得到的旋转椭圆面的方程是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

此曲面如以平行于 xy 面的平面 $z=h\ (-c<h<c)$ 来截，所得到的平截线是圆，它的方程是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\quad z=h. \tag{A}$$

且其半径等于 $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$，故当 h 由 $-c$ 变至 $+c$ 时，圆族(A)即作出这个旋转椭圆面．

现以平行于 xy 面的平面 $z=h(-c<h<c)$ 上的椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\ \ z=h \quad (a,\ b,\ c>0) \tag{B}$$

来代替圆(A)，它的两半轴长分别为 $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ 及 $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$. 当 h 由 $-c$ 变到 $+c$ 时，此椭圆族即作出一曲面，它的方程可由(B)消去 h 而得到. 消去 h 后，得到

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,\ b,\ c>0). \tag{1}$$

方程(1)所表示的二次曲面称为椭圆面；(1)叫做椭圆面的标准方程. 现在讨论其性质如下：

1. 对称性　曲面(1)关于三坐标面、三坐标轴和原点都对称；三坐标面叫做(1)的主平面，三坐标轴叫做主轴，原点叫做中心.

2. 截距　在(1)中，令

$y=z=0$，则得 x 轴上的截距为 $OA=a$, $OA'=-a$;

$z=x=0$，则得 y 轴上的截距为 $OB=b$, $OB'=-b$;

$x=y=0$，则得 z 轴上的截距为 $OC=c$, $OC'=-c$.

$(\pm a,\ 0,\ 0)$, $(0,\ \pm b,\ 0)$, $(0,\ 0,\ \pm c)$ 叫做端点或顶点；$A'A=2a$, $B'B=2b$, $C'C=2c$ 叫做主轴的长.

3. 截部　在(1)中，令

$x=0$，则得 yz 面上的截部为椭圆 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$;

$y=0$，则得 zx 面上的截部为椭圆 $\frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$, $y=0$;

$z=0$，则得 xy 面上的截部为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$.

4. 轮廓线　在 $x=u$ 上的轮廓线是

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{u^2}{a^2},\quad x=u.$$

当 $1-\frac{u^2}{a^2}>0$，也就是 $-a<u<+a$ 时，平截线是实椭圆，且

是无数个连续变化的相似椭圆[注]. $u=\pm a$ 时，平截线是两个点；$u>a$ 或 $u<-a$ 时，平截线是虚轨迹. 因此曲面不能伸到无穷远. 同理，在 $y=v$ 上和在 $z=w$ 上的轮廓线分别是无数个连续变化的相似椭圆，且 $-b\leqslant v\leqslant b$，$-c\leqslant w\leqslant c$. 故已知曲面位于六个平面

$$x=\pm a,\ y=\pm b,\ z=\pm c$$

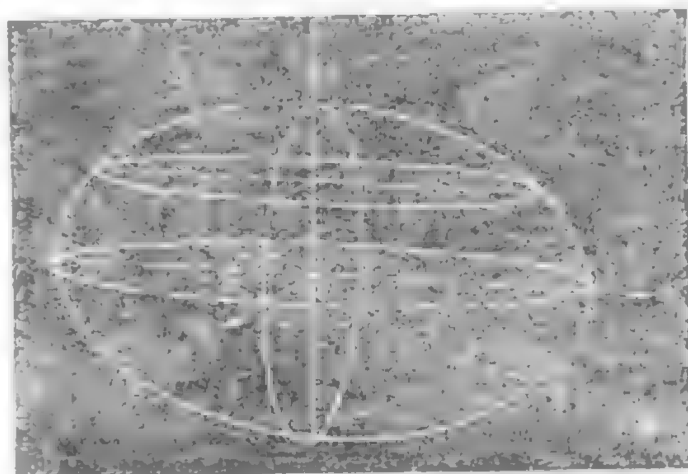


图 7-1

所围的长方体内. 这个有界性质也可以从方程(1)得出. 从(1)有不等式

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$$

因此，已知曲面位于上述长方体内为有界曲面，它的形状见图 7-1.

椭圆面有几种特殊情况：

1. 当 $a>b=c$ 时，(1)式化为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1,$$

这是长球面.

2. 当 $a=b>c$ 时，(1)式化为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

[注] 若两个椭圆的长、短轴成比例，则称为相似椭圆. 例如

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \quad 和 \quad \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$$

在 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ 时，就是相似椭圆.

这是扁球面.

3. 当 $a=b=c$ 时, (1)式化为

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

这是球面.

另外, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{2}$$

所确定的曲面叫虚椭圆面. 因为三个实数的平方和不可能是负数, 所以此曲面上没有实点.

【例 1】 求证两个椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>b>c>0)$$

的交线是两个椭圆, 并求它们的参数方程.

【证及解】 将两个方程相减得

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)(x^2-y^2)=0,$$

即得 $x\pm y=0$. 此即交线所在平面的方程. 为了求出交线的标准方程, 可在 xy 面内将坐标轴旋转 $45°$, 则有

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \quad z=z',$$

于是 $x-y=0$ 化成 $y'=0$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 化成

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{z'^2}{c^2}=1.$$

在此方程中令 $y'=0$, 得

$$\frac{x'^2}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{z'^2}{c^2}=1,$$

故交线在新系下的方程是

$$\frac{x'^2}{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}+\frac{z'^2}{c^2}=1, \quad y'=0.$$

这是一椭圆，它的参数方程是

$$x'=\frac{\sqrt{2}\,ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta, \quad z'=c\cos\theta, \quad y'=0 \quad (0\leqslant\theta<2\pi).$$

在旧系下的参数方程是

$$x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta, \quad y=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta, \quad z=c\sin\theta$$

$$(0\leqslant\theta<2\pi).$$

关于 $x+y=0$ 的情况可作类似讨论，读者试自行考虑并补上.

1·2 单叶双曲面

我们已经知道以 z 轴为旋转轴，旋转 xz 面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0 \quad (a, c>0)$$

所得到的旋转单叶双曲面的方程是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

此曲面如以平行于 xy 面的平面 $z=h$ $(-\infty<h<\infty)$ 来截，则所得到的平截线是圆，它的方程是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h. \tag{A}$$

其半径等于 $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$，故当 h 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 时，圆族(A)即作出这个旋转单叶双曲面.

现以与 xy 面平行的平面 $z=h$ $(-\infty<h<+\infty)$ 上的椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h \quad (a, b, c>0) \tag{B}$$

来代替圆(A)，它的两个半轴长是 $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ 及 $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$。当 h 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 时，此椭圆族即作出一曲面，它的方程可由(B)消去 h 而得到。消去 h 后，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a, b, c>0). \tag{3}$$

方程(3)所表示的二次曲面称为单叶双曲面，而且将(3)叫做它的标准方程。下面讨论其性质：

1. 对称性　曲面(3)关于三个坐标面、三个坐标轴和原点都对称，并且分别叫做它的主平面、主轴和中心。

2. 截距　在 x 轴上有截距 $OA=a$, $OA'=-a$；在 y 轴上有截距 $OB=b$、$OB'=-b$；在 z 轴上则没有截距。$(\pm a, 0, 0)$，$(0, \pm b, 0)$ 叫做端点或顶点。$A'A=2a$、$B'B=2b$，叫做主轴之长。

3. 截部　在 yz 面、zx 面上的截部分别为双曲线

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \ x=0 \quad 及 \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \ y=0;$$

在 xy 面上的截部为椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \ z=0.$$

4. 轮廓线　在 $z=w$ 上的轮廓线是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{w^2}{c^2}, \ z=w.$$

当 $-\infty<w<\infty$ 时，平截线是实椭圆，且是无数个连续变化的相似椭圆，故曲面在 xy 面的上、下半空间内都伸延到无穷远，且在 $z=0$ 上所得到的椭圆最小，叫咽喉椭圆。在 $x=u$ 上的轮廓线是

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{u^2}{a^2},\quad x=u.$$

当 $-\infty<u<\infty$ 时，平截线是双曲线．同理，在 $y=v$ 上的轮廓线也是双曲线

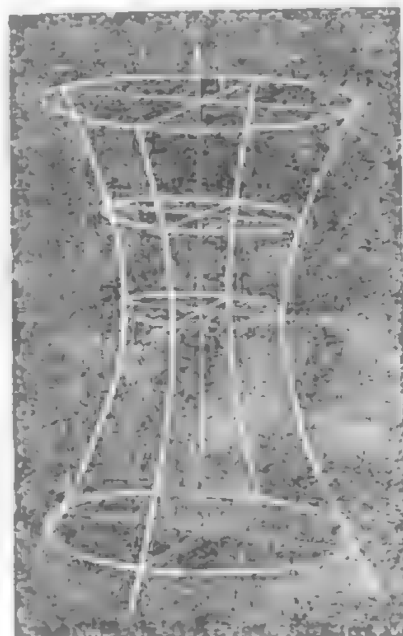


图 7-2

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{v^2}{b^2},\quad y=v$$

$$(-\infty<v<+\infty).$$

曲面的形状见图 7-2.

同理可以建立其它两个单叶双曲面的标准方程

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

和

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (5)$$

【例 2】 单叶双曲面把空间分成两个区域．若已知(3)及一定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，求 P_0 和曲面(3)的中心位于同一区域的充要条件．

解：以中心为始点，过 P_0 作半线，交单叶双曲面(3)于 $Q(\xi, \eta, \zeta)$．设 $|OP_0|=\gamma$，$|OQ|=\rho$；又 $\overrightarrow{OP_0}$ 的方向余弦是 λ, μ, ν，则 $\lambda=\frac{x_0}{\gamma}=\frac{\xi}{\rho}$，故有 $\xi=\frac{\rho x_0}{\gamma}$，同理 $\eta=\frac{\rho y_0}{\gamma}$，$\zeta=\frac{\rho z_0}{\gamma}$.

但 Q 在(3)上，故有

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=1.$$

将 ξ, η, ζ 的值代入上式，得到

$$\left(\frac{\rho}{\gamma}\right)^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)=1.$$

即

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=\left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^2.$$

现在来看中心所在的区域. 当 P_0 与 O 在同一区域内, 则 $\frac{\gamma}{\rho}<1$, 即得所求的充要条件是

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}<1.$$

中心所在的区域通常叫内部, 另一区域则叫外部. 因此 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在(3)内部的充要条件为

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}<1.$$

同理可求 P_0 在外部的充要条件为

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}>1.$$

关于内部和外部也可用集合的形式表示(参看复习题一第 9 题): 内部为

$$\left\{P(x, y, z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1<0\right.\right\};$$

外部为

$$\left\{P(x, y, z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1>0\right.\right\}.$$

1·3 双叶双曲面

我们已经知道, 以 z 轴为旋转轴, 旋转 zx 面上的双曲线

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \quad y=0 \quad (a, c>0)$$

所得到的旋转双叶双曲面的方程是

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1,$$

此曲面如以平行于 xy 面的平面 $z=h$ ($h<-c$ 或 $h>+c$) 来截, 则所得平截线是圆, 它的方程是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, \quad z=h, \tag{A}$$

且其半径等于 $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, 故当 h 由 $-\infty$ 增到 $-c$, 再从 $+c$ 增到 $+\infty$ 时, 圆族(A)即作出这个旋转双叶双曲面.

今以与 xy 面平行的平面 $z=h$ $(h<-c$ 或 $h>+c)$上的椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\ z=h\quad(a,\ b,\ c>0)\tag{B}$$

来代替圆(A). 它的两个半轴长是 $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ 及 $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, 当 h 由 $-\infty$ 增到 $-c$, 再从 $+c$ 增到 $+\infty$ 时, 此椭圆族即作出一个曲面, 它的方程可由(B)消去 h 而得到. 消去 h 后, 得

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad(a,\ b,\ c>0).\tag{6}$$

方程(6)所表示的二次曲面称为*双叶双曲面*; (6)就叫做它的*标准方程*. 下面讨论其性质:

1. 对称性 曲面(6)关于三个坐标面、三个坐标轴和原点都对称, 并且分别叫做它的*主平面*、*主轴*和*中心*.

2. 截距 在 x 轴和 y 轴上没有截距, 在 z 轴上有截距 $OC=c$ 和 $OC'=-c$. $(0,\ 0,\ \pm c)$ 叫做*端点*或*顶点*, $C'C=2c$ 叫做*主轴的长*.

3. 截部 此曲面在 yz 面、zx 面上的截部分别是双曲线

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ x=0\quad 和\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,\ y=0.$$

在 xy 面上则没有截部.

4. 轮廓线 在 $z=w$ 上的轮廓线是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{w^2}{c^2}-1,\ z=w.$$

当 $+c<w<+\infty$ 时, 平截线是实椭圆, 且是无数个在 xy 面上方连续变大的实椭圆; 当 $-\infty<w<-c$ 时, 平截线是在

xy 面下方连续变大的椭圆，故曲面在 xy 面上、下半空间都伸延到无穷远．又 $x=u$ 上的轮廓线是

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{u^2}{a^2},\quad x=u.$$

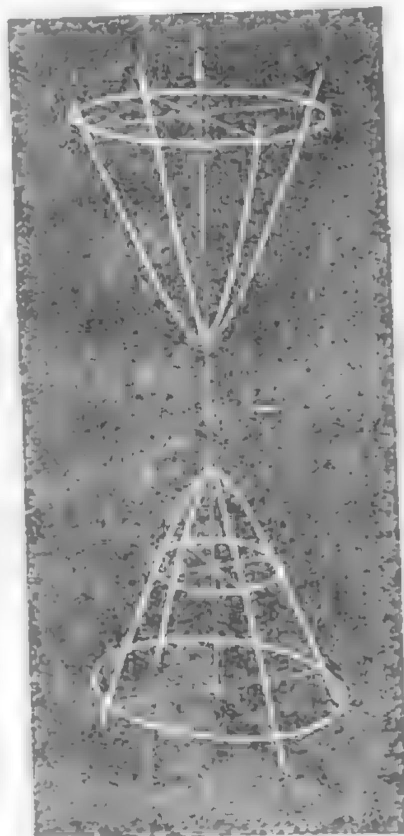


图 7-3

当 $-\infty<u<+\infty$ 时，平截线是双曲线．同理，$y=v$ 上的轮廓线也是双曲线

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{v^2}{b^2},\quad y=v.$$

曲面的形状见图 7-3.

同理可以建立其它两个双叶双曲面的标准方程

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (7)$$

和

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (8)$$

上面三种二次曲面都有唯一确定的对称中心，我们称它们以及虚椭圆面(2)都叫做有心二次曲面．(1)～(8)分别是它们的标准方程．

【例 3】 求证方程

$$ax^2+by^2+cz^2+2ux+2vy+2wz+d=0,\quad abc\neq 0$$

表示有心二次曲面，且求中心坐标和主轴方程．

【证及解】 将已知方程配方，得

$$a\left(x+\frac{u}{a}\right)^2+b\left(y+\frac{v}{b}\right)^2+c\left(z+\frac{w}{c}\right)^2$$

$$=\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}-d.$$

设 $k=\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}-d$，作平移 $x=x'-\frac{u}{a}$，$y=y'-\frac{v}{b}$，

$z=z'-\frac{w}{c}$，则有

$$ax'^2+by'^2+cz'^2=k. \qquad (A)$$

1．设 $k=0$，则 (A) 表示以 $\left(-\frac{u}{a}, -\frac{v}{b}, -\frac{w}{c}\right)$ 为顶点的二次代数锥面。

2．设 $k\neq 0$，

(1) $\frac{a}{k}>0$，$\frac{b}{k}>0$，$\frac{c}{k}>0$，则 (A) 表示椭圆面。

(2) $\frac{a}{k}<0$，$\frac{b}{k}<0$，$\frac{c}{k}<0$，则 (A) 表示虚椭圆面。

(3) $\frac{a}{k}$、$\frac{b}{k}$、$\frac{c}{k}$ 中两个是正，一个是负，则 (A) 表示单叶双曲面。

(4) $\frac{a}{k}$、$\frac{b}{k}$、$\frac{c}{k}$ 中两个是负，一个是正，则 (A) 表示双叶双曲面。

在 (1)、(2)、(3) 三种情况下，中心坐标是 $\left(-\frac{u}{a}, -\frac{v}{b}, -\frac{w}{c}\right)$，主轴是新 x' 轴、y' 轴、z' 轴，即

$$y'=z'=0, \quad z'=x'=0, \quad x'=y'=0,$$

在旧系下，即

$$y=-\frac{v}{b}, z=-\frac{w}{c};\ z=-\frac{w}{c}, x=-\frac{u}{a};\ x=-\frac{u}{a}, y=-\frac{v}{b}.$$

习　题　7.5

1．说明下列曲面的形状

(1) $9x^2+16y^2+25z^2=1$；　　(2) $4x^2-9y^2-16z^2=25$；

(3) $4x^2-9y^2-16z^2=-25$；　　(4) $4x^2+9y^2-16z^2=25$；

(5) $4x^2+9y^2-16z^2=-25$；　　(6) $x^2+4y^2+5z^2+1=0$。

2. 求椭圆面的标准方程，使在第一面和第二面的截部分别是

$$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1,\ x=0 \quad 和 \quad \frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1,\ y=0.$$

3. 已知有心二次曲面 $Px^2+Qy^2+Rz^2=1$，试定这个曲面，使它：(1)过 $(2, -1, 1)$，$(-3, 0, 0)$和$(1, -1, -2)$；(2)过$(2, 1, 3)$和曲线 $3x^2+y^2-9=0,\ z=4$.

4. 求证单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 和双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 在 zx 面及 yz 面上的截部都是共轭双曲线.

5. 证明 $2x^2+3y^2+4z^2-4x-6y+16z+16=0$ 表示椭圆面，且求其中心和三个半轴长.

6. 求方程(1)、(3)和(6)的参数方程.

7. 椭圆面分空间成两个区域. 已知椭圆面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 及一定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$. 求 P_0 及中心位于同一区域的充要条件.

8. 已知一个双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$，又知一个椭圆的中心在 z 轴上，其主轴分别与 x 轴及 y 轴平行，并与双曲线相交. 当椭圆变动时，求证所产生的曲面是单叶双曲面.

9. 求椭圆面族

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+\lambda(lx+my+nz-p)=0$$

的中心轨迹，其中 λ 是参数.

*10. 一条动直线移动时，使它上面的三个定点分别在三个两两垂直的平面上. 试推求此直线上另一定点的轨迹.
[提示：以三个定平面为坐标面，第四个定点与三个定点的距离分别是 a、b、c.]

第二节 无心二次曲面

2·1 椭圆抛物面

设有抛物线 $y^2=2pz,\ x=0,\ p>0$. 以 z 轴为旋转轴，所

得旋转抛物面的方程是

$$x^2+y^2=2pz.$$

此曲面如以平行于 xy 面的平面 $z=h$, $h>0$ 来截，所得的平截线是圆，它的方程是

$$x^2+y^2=2ph,\quad z=h, \tag{A}$$

且其半径等于 $\sqrt{2ph}$. 当 h 由 0 变到 $+\infty$ 时，圆族(A)即作出这个旋转抛物面.

若以与 xy 面平行的平面 $z=h$ 上的椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2h}{c},\quad z=h,\ a,b>0,\quad c,h>0 \tag{B}$$

来代替圆(A)，它的两个半轴长是 $a\sqrt{\frac{2h}{c}}$ 及 $b\sqrt{\frac{2h}{c}}$. 当 $c>0$ 时，h 由 0 变至 $+\infty$; 当 $c<0$ 时，h 由 $-\infty$ 变至 0, 此椭圆族即作出一曲面，它的方程可由 (B) 消去 h 而得到. 消去 h 后，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c},\quad a,\ b>0. \tag{9}$$

方程(9)所表示的二次曲面称为**椭圆抛物面**，(9)叫做它的标准方程. 下面讨论其性质:

1. 对称性　关于 yz 面、zx 面都对称，这两个平面称为**主平面**; 关于 z 轴对称，z 轴称为**主轴**; 关于原点则不对称.

2. 截距　在坐标轴上的截距都是零，因此曲面过原点，并将原点叫做**端点**或**顶点**.

3. 截部　在 yz 面、zx 面上的截部分别是抛物线

$$y^2=\frac{2b^2}{c}z,\quad x=0\quad 和\quad x^2=\frac{2a^2}{c}z,\quad y=0.$$

在 xy 面上则为原点.

4. 轮廓线　$z=w$ 上的轮廓线是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2w}{c},\quad z=w.$$

当 $c>0$ 时，w 由 0 变至 $+\infty$；当 $c<0$ 时，w 由 $-\infty$ 变至 0，所得平截线都是中心在 $(0, 0, w)$ 的相似实椭圆，且分别在 xy 面的上方或下方连续变大，故曲面在 xy 面的上半空间或下半空间伸至无穷远．$x=u$ 上的轮廓线是

$$y^2=\frac{2b^2}{c}\left(z-\frac{cu^2}{2a^2}\right),\quad x=u.$$

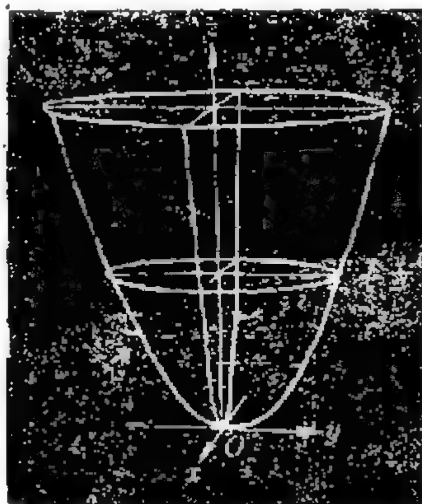


图 7-4

当 u 变化时，表示顶点在 $\left(u,\ 0,\ \frac{cu^2}{2a^2}\right)$，焦参数[注]$=\frac{b^2}{c}$ 的全等抛物线．同理 $y=v$ 的轮廓线也是全等抛物线．曲面的形状见图 7-4.

同理可以建立其它两个椭圆抛物面的方程

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a} \tag{10}$$

和

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}=\frac{2y}{b}. \tag{11}$$

【例 4】 已知两个抛物线，它们有公顶点和公轴（同向），但参数不同，且所在平面互相垂直．当一个抛物线平行移动且顶点在另一个抛物线上时，求动抛物线所产生的曲面．

解．以公顶为原点，公轴的方向为 x 轴的正向，所在的两个垂直平面为 xy 面和 zx 面．于是两抛物线的方程可以写成

［注］ 抛物线 $y^2=2px$ 中的 p 表示从焦点到准线的距离，叫做抛物线的焦参数。

$$y^2=2px,\quad z=0,\quad p>0$$

和 $$z^2=2qx,\quad y=0,\quad q>0,\quad 且\quad p\neq q.$$

设第一个抛物线平移到 $z=c$，且顶点是 $(a,\ b,\ c)$，则平移后的方程是

$$(y-b)^2=2p(x-a),\quad z=c.$$

又顶点 $(a,\ b,\ c)$ 在第二个抛物线上，则有

$$c^2=2qa,\quad b=0.$$

由这四个方程消去 a、b、c，得

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x,$$

此表示以 x 轴为主轴的椭圆抛物面.

2·2 双曲抛物面

设有双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2h}{c},\quad z=h\quad (a,\ b>0). \tag{A}$$

当 h 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 时，这双曲线族即产生一个曲面，它的方程可由(A)消去 h 而得到. 消去 h 后，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}\quad (a,\ b>0). \tag{12}$$

方程(12)所表示的二次曲面称为*双曲抛物面*，且为该曲面的标准方程. 下面讨论其性质：

1. 对称性　关于 yz 面、zx 面都对称，这两个平面称为*主平面*，关于 z 轴对称，z 轴称为*主轴*；关于原点则不对称.

2. 截距　在坐标轴上的截距都是零，因此曲面通过原点，并将原点叫做*端点*或*顶点*.

3. 截部　在 yz 面、zx 面上的截部分别是抛物线

$$y^2=-\frac{2b^2z}{c},\quad x=0 \quad 和 \quad x^2=\frac{2a^2z}{c},\quad y=0.$$

在 xy 面上则是一对直线

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0,\quad z=0.$$

4．轮廓线　在 $z=w$ 上的轮廓线是双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2w}{c},$$

$$z=w$$

$$(-\infty<w<+\infty).$$

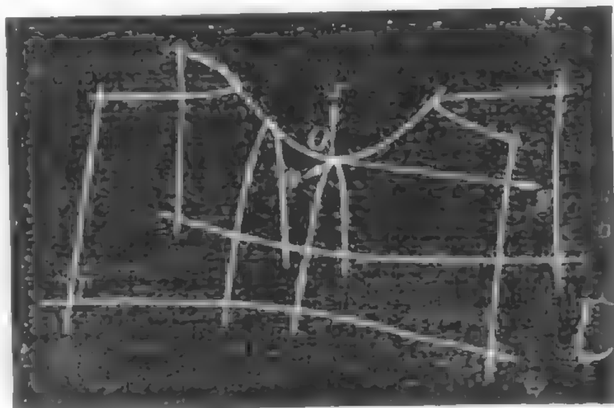


图　7-5

当 $c\cdot w>0$ 时，x 轴的方向为实轴方向；$c\cdot w<0$ 时，y 轴方向为实轴方向，故曲面在 xy 面的上、下半空间都伸到无穷远．在 $y=v$ 上的轮廓线是

$$x^2=\frac{2a^2}{c}\left(z+\frac{cv^2}{2b^2}\right),\quad y=v \quad (-\infty<v<+\infty),$$

此表示顶点在$\left(0,\ v,\ -\frac{cv^2}{2b^2}\right)$，焦参数是 $\frac{a^2}{c}$ 的全等抛物线．

同理 $x=u$ 上的轮廓线是全等抛物线

$$y^2=-\frac{2b^2}{c}\left(z-\frac{cu^2}{2a^2}\right),\quad x=u \quad (-\infty<u<+\infty).$$

曲面的形状在 $c<0$ 时，见图 7-5．由于形如马鞍，故也叫做马鞍形曲面．

同理可以建立其它两个双曲抛物面的标准方程

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a} \tag{13}$$

和

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{2y}{b}. \tag{14}$$

上面这两种二次曲面都没有对称中心，故它们叫做无心二次曲面，(9)～(14)分别是它们的标准方程.

【例 5】 求证方程

$$ax^2+by^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad (ab\neq 0,\ w\neq 0)$$

表示无心二次曲面，且求其顶点坐标和主轴方程.

【证及解】 将已知方程配方，得

$$a\left(x+\frac{u}{a}\right)^2+b\left(y+\frac{v}{b}\right)^2=-2w\left(z-\frac{\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}-d}{2w}\right).$$

当 $ab>0$ 时，表示椭圆抛物面；$ab<0$ 时，表示双曲抛物面，且顶点坐标是 $\left(-\frac{u}{a},\ -\frac{v}{b},\ \frac{\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}-d}{2w}\right)$，主轴方程是

$$x+\frac{u}{a}=0,\quad y+\frac{v}{b}=0.$$

习　题　7·2

1. 说明下列曲面的形状

   (1) $x^2-y^2=2z$;　　(2) $y^2+z^2=2x$;　　(3) $z^2-4y^2=-2y$.

2. 求下列抛物面与直线的交点

   (1) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ 与 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$;

   (2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$ 与 $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$.

3. 已知无心二次曲面 $Px^2+Qy^2=2z$，试定这个曲面，使(1)过(1, 0, 1)和(0, 2, −1)；(2)过曲线 $2x^2+y^2=4,\ z=2$.

4. 求(9)和(12)的参数方程.

5. 利用绕 y 轴的旋转，化简 $9x^2-25y^2+16z^2-24zx+80x-60z=0$，并说明它的形状.

6. 求证 $z=xy$ 是双曲抛物面.

[提示: 在 xy 面上作旋转.]

*7. 讨论二次曲面 $ax^2+2hxy+by^2=2z$ 的形状.

第三节 直纹二次曲面

3·1 单叶双曲面的直纹性

我们已经知道二次柱面和二次代数锥面都是直纹曲面. 现在证明单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,\ b,\ c>0) \tag{1}$$

也是直纹曲面. 将方程(1)写成

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

于是由第六章第三节得知单叶双曲面(1)可以由直线族

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{2}$$

或

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3}$$

来产生, 这里 λ, μ 是参数. 我们将直线族(2)和(3)分别叫做单叶双曲面(1)的 λ 族母线和 μ 族母线. 在方程(2)中令 λ 的值渐减而趋于零或渐增而趋于无穷, 则分别得

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0,\quad 1-\frac{y}{b}=0 \tag{4}$$

和

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0,\quad 1+\frac{y}{b}=0. \tag{5}$$

这两条直线仍在曲面(1)上, 故也应看作是 λ 族母线. 同理可知两条直线

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0,\quad 1-\frac{y}{b}=0 \tag{6}$$

和

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0,\quad 1+\frac{y}{b}=0 \tag{7}$$

也是 μ 族母线. 故有

定理 1 单叶双曲面(1)可由 λ 族母线(2)、(4)和(5)或 μ 族母线(3)、(6)和(7)来产生, 其中 $-\infty<\lambda,\ \mu<+\infty$.

下面研究母线的一些性质:

定理 2 过单叶双曲面上的任一点, 可得每族中的一条母线.

【证】 今仅就 λ 族母线的情况加以证明. 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$是单叶双曲面(1)上的任意一点, 则有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1. \tag{*}$$

1) 设 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=0,\ 1-\frac{y_0}{b}=0$, 于是过 P_0 得母线(4).

2) 设 $\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\neq 0,\ 1-\frac{y_0}{b}=0$, 由(*)得

$$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=\frac{1-\frac{y_0^2}{b^2}}{\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}}=0,$$

于是化为上面 1) 的情况.

3) 设 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=0,\ 1+\frac{y_0}{b}\neq 0$, 由(*)得

$$1-\frac{y_0}{b}=\frac{\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{z_0^2}{c^2}}{1+\frac{y_0}{b}}=0,$$

于是化为上面 1) 的情况.

4) 设 $\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=0,\ 1+\frac{y_0}{b}=0$, 于是过 P_0 得母线(5).

5) 设 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\neq 0,\ 1+\frac{y_0}{b}=0$, 此可以化为上面(4)的情况.

6) 设 $\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=0,\ 1-\frac{y_0}{b}\neq 0$, 此可以化为上面(4)的情况.

7) 设 $\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=0(x_0\neq 0,\ z_0\neq 0),\ 1-\frac{y_0}{b}=0$. 令 $\frac{x_0}{a}=\frac{z_0}{c}=k(\neq 0)$, 取 $\lambda=k$, 于是得过 P_0 的母线(2).

8) 设 $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=0\ (x_0\neq 0,\ z_0\neq 0),\ 1+\frac{y_0}{b}=0$. 令 $\frac{x_0}{a}=\frac{-z_0}{c}=k(\neq 0)$, 取 $\lambda=\frac{1}{k}$, 于是得过 P_0 的母线(2).

9) 设 $x_0,\ y_0,\ z_0$ 不具备以上的条件. 如果 λ 族母线 (2) 过 P_0, 则有

$$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=\lambda\left(1+\frac{y_0}{b}\right),\quad \frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y_0}{b}\right).$$

由(*)得

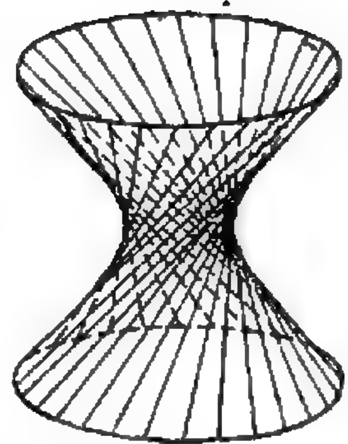
$$\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}}{1+\frac{y_0}{b}}=\frac{1-\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}}.$$

这说明上面的两个方程仅能确定一个相同的 λ, 因此过 P_0 点仅有 λ 族母线中的一条直线.

同理也可证过 P_0 仅有 μ 族母线中的一条. ▮

注意 定理 1 说明了 λ 族母线和 μ 族母线上的每一点都在单叶双曲面(1)上; 另一方面, 定理 2 说明了(1)上的每一点都在 λ 族母线和 μ 族母线上. 因此就得出(1)是直纹曲面(见

图 7-6).


图 7-6

下面几个定理的证明假定 λ 及 μ 不是零，也不趋于无穷大．这就是说不讨论(4)～(7)的情况．由于这些情况比较简单留给读者自行补出．

定理 3 单叶双曲面的两族母线无公共直线．

【证】 从(2)中消去 z，即得(2)在 xy 面上的投射柱面．由于(2)是直线，故投射柱面化为平面，即知(2)在 xy 面上的射影是

$$\frac{2x}{a}=\lambda+\frac{1}{\lambda}+\frac{y}{b}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right),\ z=0. \tag{A}$$

同理，(2)在 yz 面上的射影是

$$\frac{2z}{c}=\lambda-\frac{1}{\lambda}+\frac{y}{b}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right),\ x=0. \tag{B}$$

对于(3)也有两样结果：

$$\frac{2x}{a}=\mu+\frac{1}{\mu}+\frac{y}{b}\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right),\ z=0 \tag{C}$$

和

$$\frac{2z}{c}=-\mu+\frac{1}{\mu}-\frac{y}{b}\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right),\ x=0. \tag{D}$$

如果有两条异族母线相重合，则它们的射影也必重合．比较(A)、(C)及(B)、(D)，则有

$$\lambda+\frac{1}{\lambda}=\mu+\frac{1}{\mu}, \tag{E}$$

$$\lambda-\frac{1}{\lambda}=\mu-\frac{1}{\mu}, \tag{F}$$

$$\lambda-\frac{1}{\lambda}=-\mu+\frac{1}{\mu}, \tag{G}$$

$$\lambda+\frac{1}{\lambda}=-\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right). \tag{H}$$

将(E)、(H)及(F)、(G)分别相加，得 $\lambda+\frac{1}{\lambda}=0$，$\lambda-\frac{1}{\lambda}=0$，于是 $\lambda=0$，$\frac{1}{\lambda}=0$，此不可能．故本定理得证．▌

定理 4 单叶双曲面同族的两母线必不共面．

【证】 设有 λ 族中两条不同的母线

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda_1\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda_1}\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{I}$$

和

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda_2\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda_2}\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{J}$$

其中 $\lambda_1\neq\lambda_2$．如果(I)与(J)共面，且设过(I)的平面束是

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-\lambda_1\left(1+\frac{y}{b}\right)+k\left[\frac{x}{a}-\frac{z}{c}-\frac{1}{\lambda_1}\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0. \tag{K}$$

假定(K)还过(J)，则将(J)中 $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}$ 及 $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}$ 的值代入(K)，必得 y 的恒等式

$$(\lambda_2-\lambda_1)\left(1+\frac{y}{b}\right)+k\left(\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\equiv 0.$$

即
$$\frac{y}{b}(\lambda_1\lambda_2+k)+\lambda_1\lambda_2-k\equiv 0.$$

故有
$$\lambda_1\lambda_2+k=0,\quad \lambda_1\lambda_2-k=0.$$

此两方程不能有公共的 k 值，因此不能共面．至于(4)、(5)以及(2)、(4)和(2)、(5)显然不能共面．对于 μ 族的两条母线也可作同样讨论，因此本定理得以证明．▌

定理 5 单叶双曲面不同族的两条母线必共面．

【证】 (2)和(3)的方向数分别是

$$a(\lambda^2-1),\ 2\lambda b,\ c(\lambda^2+1)$$

和 $$a(\mu^2-1),\ 2\mu b,\ -c(\mu^2+1),$$

它们平行的充要条件是

$$\frac{a(\lambda^2-1)}{a(\mu^2-1)}=\frac{2\lambda b}{2\mu b}=\frac{c(\lambda^2+1)}{-c(\mu^2+1)},$$

即 $$1+\lambda\mu=0.$$

1. 当 $1+\lambda\mu=0$ 时，(2)和(3)平行必共面.

2. 当 $1+\lambda\mu\neq0$ 时，(2)和(3)不平行，由(2)及(3)，得

$$\frac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{\lambda}=\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{\mu}=\frac{1-\frac{y}{b}}{\lambda\mu}=\frac{1+\frac{y}{b}}{1}.$$

将后两式的分子和分母分别相加，得 $\frac{2}{1+\lambda\mu}$. 于是有

$$\frac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{\lambda}=\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{\mu}=\frac{2}{1+\lambda\mu},$$

$$\frac{1-\frac{y}{b}}{\lambda\mu}=\frac{1+\frac{y}{b}}{1}=\frac{2}{1+\lambda\mu}.$$

利用比例性质

$$\frac{\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)}{\lambda+\mu}=\frac{2}{1+\lambda\mu},$$

$$\frac{\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)}{\lambda-\mu}=\frac{2}{1+\lambda\mu},$$

$$\frac{-\left(1-\frac{y}{b}\right)+\left(1+\frac{y}{b}\right)}{-\lambda\mu+1}=\frac{2}{1+\lambda\mu},$$

即得

$$x=a\left(\frac{\lambda+\mu}{1+\lambda\mu}\right),\quad y=b\left(\frac{1-\lambda\mu}{1+\lambda\mu}\right),\quad z=c\left(\frac{\lambda-\mu}{1+\lambda\mu}\right).\qquad(8)$$

(8)式说明(2)及(3)有公共解，即它们相交，故必共面，且(8)就是它们交点的坐标.

又(4)与(6)；(5)与(7)；(4)与(7)；(5)与(6)；(2)与(6)；(2)与(7)；(3)与(4)；(3)与(5)也分别共面，读者试自行补证. 】

注意 (8)也可以作为曲面(1)的参数方程.

定理6 单叶双曲面上的直线不属于λ族即属于μ族.

【证】 假定曲面(1)上有直线l既不属于λ族，也不属于μ族. 于是在此直线上任取A、B两点，过A可作一条λ族母线；过B可作一条μ族母线，于是这两条母线必共面，且此平面包含l，因此这平面与曲面(1)相交于三条直线. 但曲面是二次曲面，故它与一个平面的交线应是二次曲线(见第五章第五节)而不能是三条直线，所以不合理，从而定理得以证明. 】

推论 单叶双曲面有且仅有两组母线.

【例1】 求过双曲面

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$$

上的一点(2, 3, −4)所作的两条母线的方程.

解：母线(2)过点(2, 3, −4)，则$\lambda=0$. 由定理5可得这条λ族母线的方向数是1, 0, −2. 故得过点(2, 3, −4)的λ族母线是

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+4}{-2}.$$

同理，可得过点(2, 3, −4)的μ族母线是

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{-4}.$$

【例 2】 求证单叶双曲面在咽喉椭圆的直径两端所作的异族母线必平行.

【证】 曲面(1)的咽喉椭圆是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=0.$$

它的一条直径的两个端点是

$P(a\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0)$ 和 $Q(-a\cos\theta,\ -b\sin\theta,\ 0)$.

母线 (2) 过 P 则有 $\lambda_P=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$, 过 Q 则有 $\lambda_Q=\frac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}$.

母线 (3) 过 P 则有 $\mu_P=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$, 过 Q 则有 $\mu_Q=\frac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}$.

又 $\lambda_P\mu_Q=-1$, $\lambda_Q\mu_P=-1$. 故由定理 5 的证明可知: 过 P 和 Q 的两条异族母线必平行. ▌

3·2 双曲抛物面的直纹性

下面证明双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\quad (a,\ b>0) \tag{9}$$

也是直纹曲面. 将方程(9)写作

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z,$$

于是(9)可以由直线族

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda},\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2\lambda \tag{10}$$

或

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{\mu},\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\mu \tag{11}$$

来产生，这里 λ, μ 是参数．直线(10)和(11)分别叫做双曲抛物面(9)的 λ 族母线和 μ 族母线．在方程(10)和(11)中，分别令 λ 和 μ 趋于零，则有

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\quad z=0 \tag{12}$$

和

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\quad z=0. \tag{13}$$

这两条直线仍分别看作是 λ 族母线和 μ 族母线．从而有

定理 7 双曲抛物面 (9) 可以由 λ 族母线 (10) 或 μ 族母线(11)产生，其中 $-\infty<\lambda,\ \mu<+\infty$.

这个定理说明(9)是直纹曲面(见图 7-7).

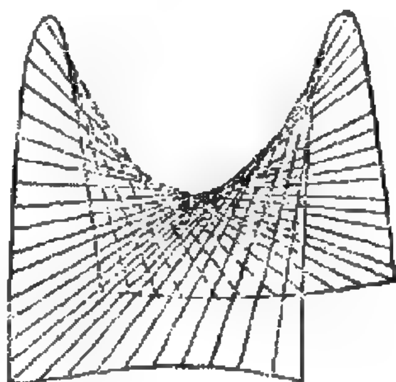


图 7-7

关于双曲抛物面的母线，仍具有上述定理 2～定理 6 的类似性质，它们的证明留给读者补上．

【例 3】 求证双曲抛物面的两族母线各与一个定平面平行．

【证】 λ 族母线(10)的方向数是 $a,\ b,\ 2\lambda$; μ 族母线(11)的方向数是 $a,\ -b,\ 2\mu$．显然这两族母线分别平行于定平面

$$bx-ay=0 \quad 和 \quad bx+ay=0. 】$$

习 题 7·3

1. 在例 1 中求过点$\left(2,\ -1,\ \dfrac{4}{3}\right)$的母线．

2. (1)求单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的咽喉椭圆上离心角是 α 的两条母线；(2) 求证单叶双曲面的两族母线与咽喉椭圆相交．因此(1)中的母线当 α 变化时，可以作为曲面的所有母线．

3. 求证 $z=xy$ 是直纹曲面，且求母线方程。

4. 求证 $z=x(x+y)$ 是直纹曲面，且求母线方程。

5. 求证双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 的参数方程可以写成

$$x=a(\mu+\lambda),\ \ y=b(\mu-\lambda),\ \ z=2\lambda\mu\quad(-\infty<\lambda,\ \mu<+\infty).$$

6. 求证过单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 上的一点 $(a\cos\theta\cdot\sec\phi,$ $b\sin\theta\cdot\sec\phi,\ \operatorname{ctg}\phi)$ 的两条母线方程是

$$\frac{x-a\cos\theta\sec\phi}{a\sin(\theta\pm\phi)}=\frac{y-b\sin\theta\sec\phi}{-b\cos(\theta\pm\phi)}=\frac{z-\operatorname{ctg}\phi}{\pm c}.$$

7. 求双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

上的一点$\left(a\rho\cos\theta,\ b\rho\sin\theta,\ \frac{\rho^2}{2}\cos\theta\right)$的两条母线方程。

8. 补出双曲抛物面的母线性质(类似于定理 2～定理 6)的证明。

*9. 推求单叶双曲面上两条母线直交的交点轨迹。

[提示：用定理 5 的方向数和公式(8)。]

*10. 推求双曲抛物面上两条母线直交的交点轨迹。

*第四节　二次曲面的作图

4·1　关于在坐标面上对称轴为坐标轴的二次曲线的作图

下面举例说明在 zx 面上的二次曲线的作图方法。

【例 1】　作椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1,\ y=0$ 的图。

解：1. 首先作坐标面 $O'x'z'$，并在其上作出椭圆 $\frac{x'^2}{16}+\frac{z'^2}{4}=1$(即原椭圆的真形)。在长轴 $A'B'$ 上任意取一点 S'，过点 S' 作 $O'z'$ 的平行线与椭圆交于点 M' 和 N'(如图 7-8 所示)。

2. 作坐标系 $Oxyz$，并且在 Ox 上取一点 S，使 $OS=\frac{1}{2}O'S'$，又过 S 作 Oz 的平行线，并且在此平行线上从 S 点起，截取线段 SM 和 SN，使

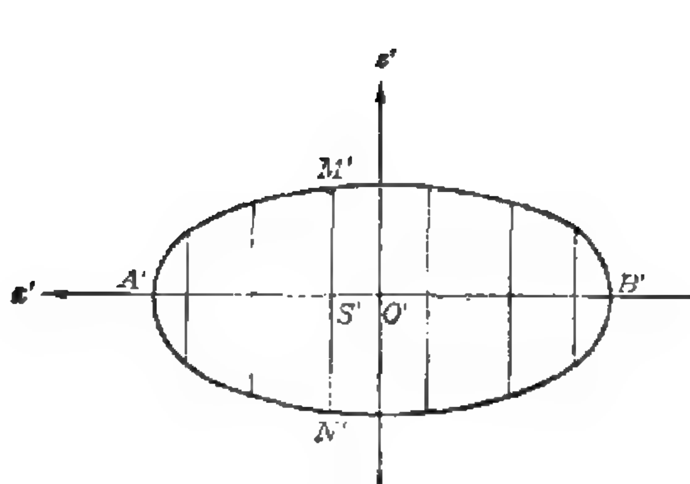


图 7-8

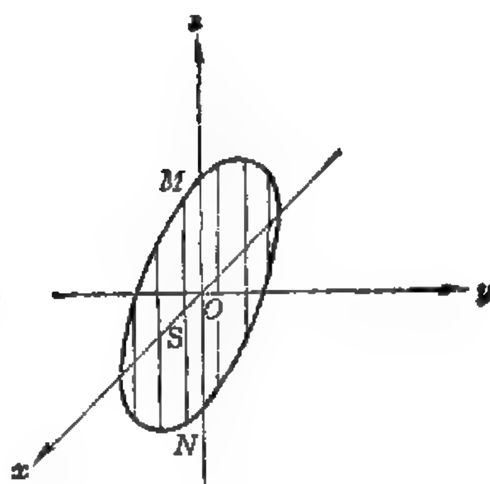


图 7-9

$SM=S'M'$, $SN=S'N'$(图 7-9)，则点 M 和 N 为所求椭圆上的两点。

3. 按照上面的方法可以作椭圆上的许多点，然后依次把它们联成一条光滑曲线，即得到所求作的椭圆(图 7-9)。

由上述例题可得到绘制椭圆的简单方法：首先作出坐标面 $O'x'z'$ 内椭圆的真形，并且作出切于它的顶点 A'、B'、C'、D' 的外切矩形(图 7-10)，然后在坐标系 $Oxyz$ 内的 zx 面上作一个平行四边形，使它的两邻边分别平行于 Ox 和 Oz，并且 $AB=\frac{1}{2}A'B'$，$CD=C'D'$(图 7-11)。最后大致作出此平行四边形的内切椭圆，其切点为 A、B、C、D，则此椭圆即为所求(图 7-11)。

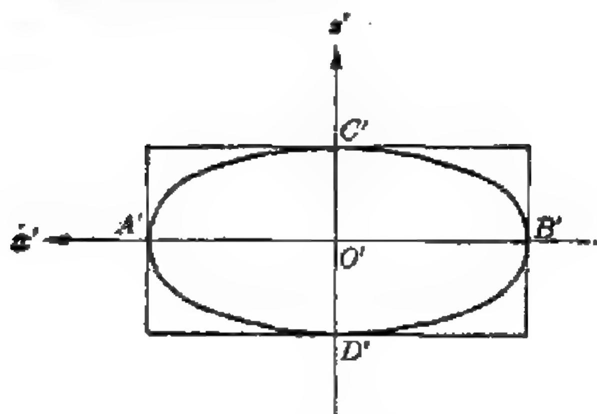


图 7-10

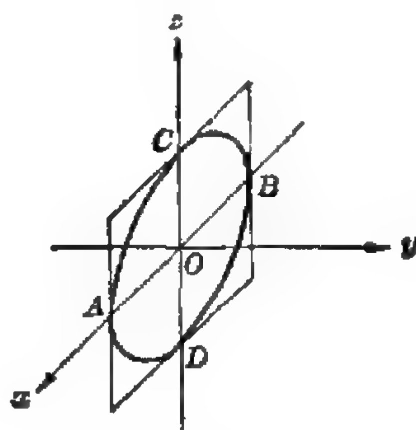


图 7-11

【例 2】 作双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$, $y=0$ 的图。

解：1. 作坐标面 $O'x'z'$，并且在 $Ox'z'$ 内作出双曲线

$$\frac{x'^2}{16}-\frac{z'^2}{4}=1$$

(即原双曲线的真形)．假设它的顶点为 A' 和 B'．在 $O'x'$ 上的线段 $A'B'$ 的外部任取一点 S'，过点 S' 作 $O'z'$ 的平行线与双曲线交于点 M' 和 N'（如图 7-12 所示）．

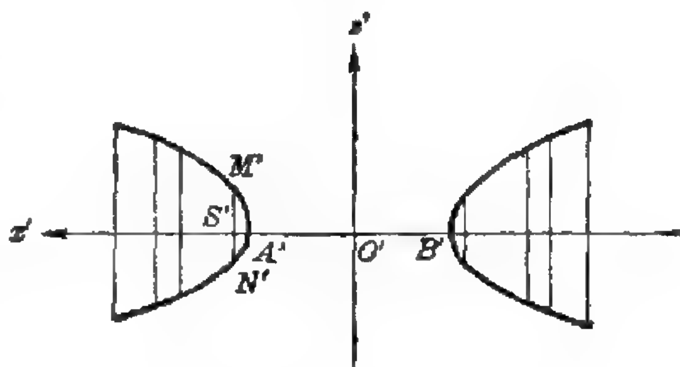


图 7-12

2．作坐标系 $Oxyz$，并且在 Ox 上取点 A、B、S，使 $OA=\frac{1}{2}O'A'$，$OB=\frac{1}{2}O'B'$，$OS=\frac{1}{2}O'S'$，又过 S 作 Oz 的平行线，并且在此平行线上从 S 点起截取线段 SM 和 SN，使 $SM=S'M'$ 和 $SN=S'N'$（图 7-13），则 M 和 N 即为所求双曲线上的两点，点 A 和 B 为它的顶点．

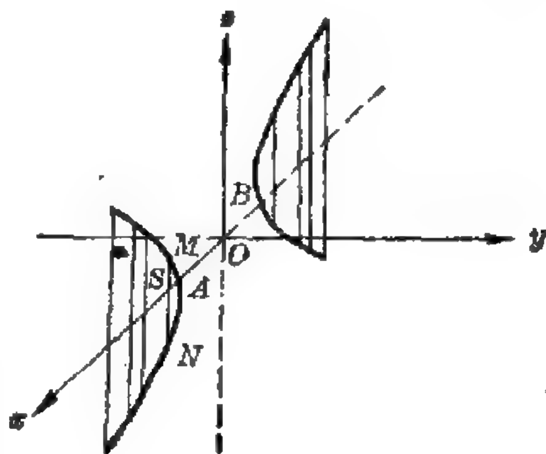


图 7-13

3．按照上面点 M 和 N 的作法，可以作出双曲线上的许多点，然后依次把它们联成一条光滑曲线，则得所求作的双曲线(图 7-13)．

如果利用双曲线的基本矩形和渐近线，那么在绘制双曲线时，也可以采用下面的一个近似作法：首先作出坐标面 $O'x'z'$ 内双曲线的真形以及它的基本矩形和渐近线（图 7-14），然后在坐标系 $Oxyz$ 内作出双曲线的近似图形即为所求(图 7-15)．

【例 3】 作抛物线 $x^2=2z$，$y=0$ 的图．

解：1．作坐标面 $Ox'z'$ 并且在 $Ox'z'$ 内作出抛物线 $x'^2=2z'$（即原抛物线的真形）．在 $O'z'$ 的正向上任意取一点 S'，过点 S' 作 $O'x'$ 的平行线与抛物线交于点 M' 和点 N'(如图 7-16 所示)．

2．作坐标系 $Oxyz$，并且在 Oz 上取一点 S，使 $OS=O'S'$，又过点 S，作 Ox 的平行线，且在此平行线上从 S 点起截取线段 SM 和 SN，使

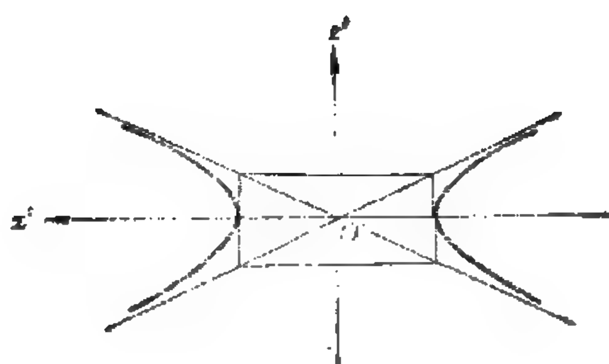


图 7-14

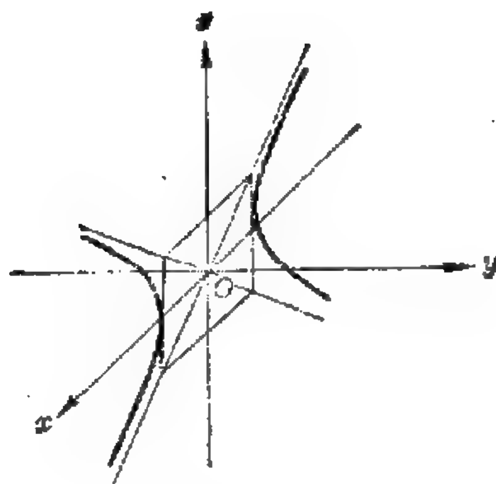


图 7-15

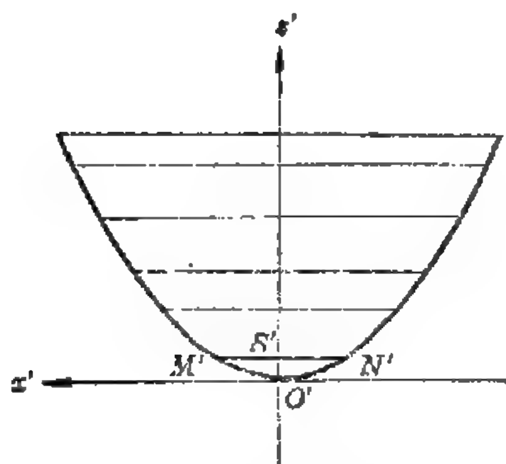


图 7-16

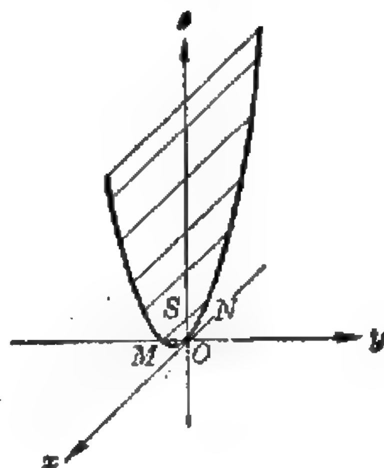


图 7-17

$SM=\frac{1}{2}S'M'$ 和 $SN=\frac{1}{2}S'N'$(图 7-17)，则点 M 和 N 为所求抛物线上的两点.

3. 按上述作法可以作出抛物线上的许多点，然后依次把它们联成一条光滑曲线，则得所求作的抛物线(图 7-17).

至于 xy 面上的二次曲线可以仿照 zx 面上的二次曲线的作图方法来作出，而 yz 面上的二次曲线则反映真形，故可直接作出.

4·2 关于平行于坐标面的平面上且对称轴平行于坐标轴的二次曲线的作图

在第 3 章第 2 节我们已经知道平行于坐标面的平面的作图方法.

现在举例说明这类二次曲线的作图.

【例 4】 作椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\ z=4$ 的图.

解: 从方程可以看出: 它是平面 $z=4$ 上对称轴平行于 x 轴和 y 轴且以点(0, 0, 4)为中心的椭圆. 因此, 首先作出平面 $z=4$, 然后根据给出的方程, 在此平面上作出椭圆, 即得所求(图 7-18).

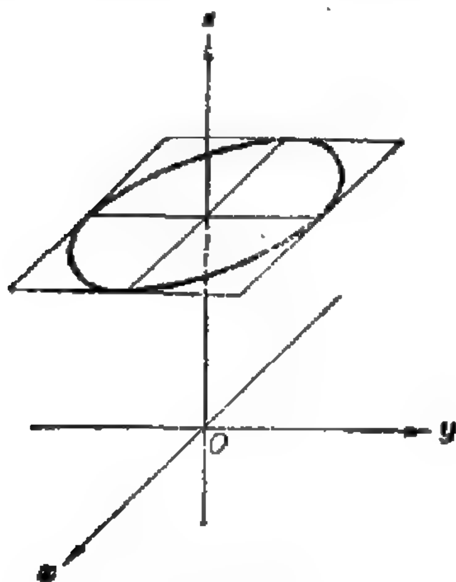


图 7-18

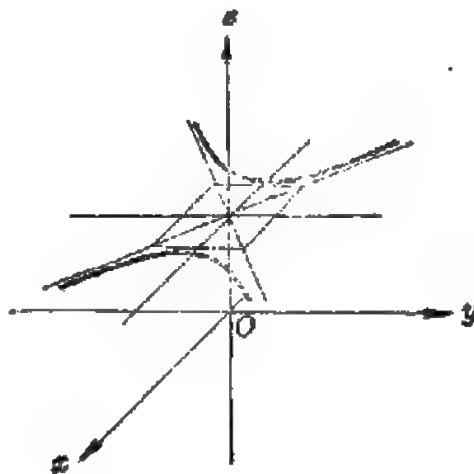


图 7-19

【例 5】 作双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1,\ z=4$ 的图.

解: 从方程可以看出: 它是平面 $z=4$ 上实轴和虚轴分别平行于 x 轴和 y 轴且以点(0, 0, 4)为中心的双曲线. 因此, 首先作出平面 $z=4$, 然后根据给出的方程在此平面上作出双曲线, 即得所求(图 7-19).

【例 6】 作抛物线 $x^2=2(z+1),\ y=-2$ 的图.

解: 从方程可以看出: 它是平面 $y=-2$ 上对称轴平行于 z 轴, 顶点在(0, -2, -1), 且开口向上的抛物线. 因此, 首先作出平面 $y=-2$, 然后根据给出的方程, 在此平面上作出抛物线即为所求(图 7-20).

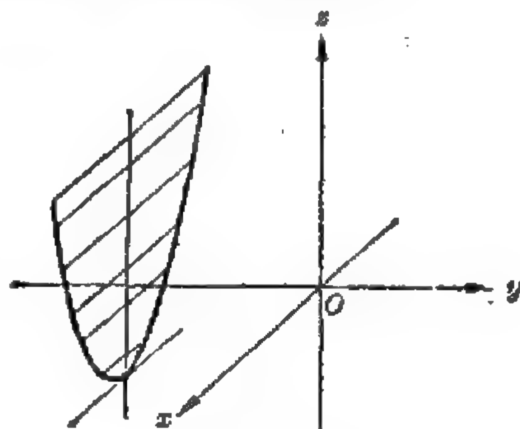


图 7-20

从上面的例题, 总结出在与坐

标面平行的平面上，且对称轴平行于坐标轴的二次曲线的一般作图的方法如下：

1. 先画出曲线所在的平面；
2. 确定二次曲线的中心，画出对称轴；
3. 画辅助直线(如双曲线的基本矩形和渐近线等)；
4. 画出二次曲线的近似图形。

4·3 二次曲面的作图

描绘二次曲面，一般先作出三坐标面上的截部，然后作出曲面的概形. 如果还作出与三坐标面平行的轮廓线，则图形将更精确些，现举例说明二次曲面的作图法如下.

【例 7】 作椭圆面 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ 的图.

解：用例 1 的方法作出三个截部

$$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1,\ x=0;\ \ \frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1,\ y=0;\ \ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,\ z=0.$$

其图形分别见图 7-21(a)、(b) 和 (c). 这三个椭圆在椭圆面顶点处相交，最后沿这三个椭圆即可作出椭圆面的图形(见图 7-22).

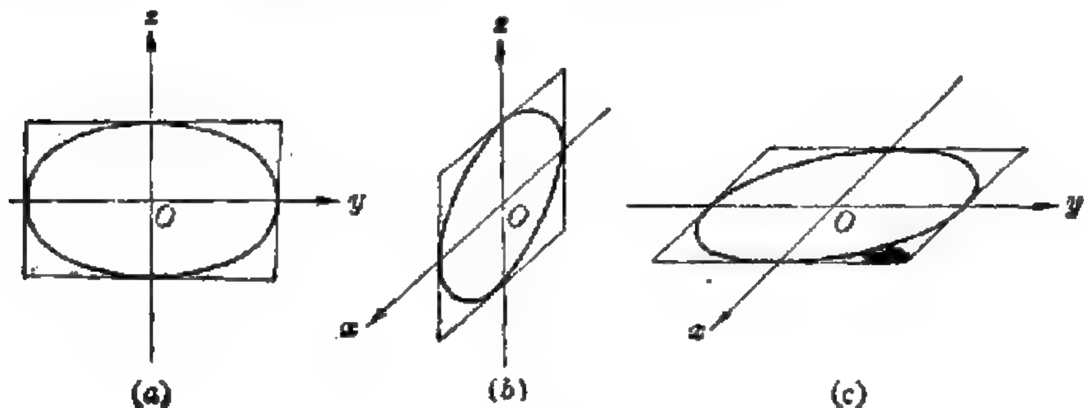


图 7-21

【例 8】 作球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 的图.

解：作出三个截部，是三个圆

$$y^2+z^2=16,\ x=0;\ \ z^2+x^2=16,\ y=0;\ \ x^2+y^2=16,\ z=0.$$

在 $z=0$ 上作直线 $y=mx,\ z=0(m\neq\pm1)$ 与圆 $x^2+y^2=16,\ z=0$ 交于两

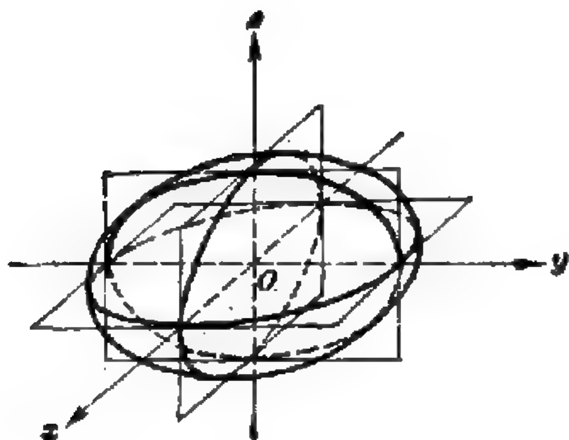


图 7-22

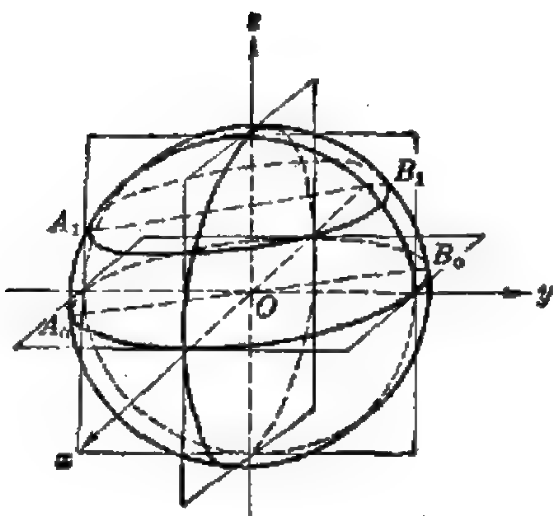


图 7-23

点 A_0 和 B_0; 在 $z=k$ ($|k|<4$) 上作直线 $y=mx$, $z=k$ ($m\neq\pm1$) 与圆 $x^2+y^2=16-k^2$, $z=k$ 交于两点 A_k 和 B_k. 这些点 A_0、A_1、… 和 B_0、B_1、… 是在平面 $y=mx$ 与球面的交线所成的圆上，联接它们就可作出图来(图 7-23).

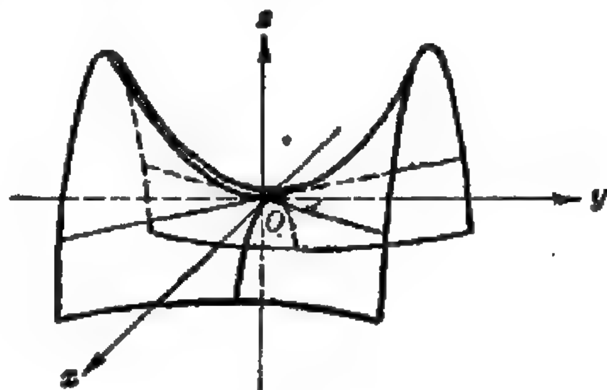


图 7-24

【例 9】 作双曲抛物面

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=z$$

的图.

解: 先作三个截部

$y^2=4z$, $x=0$;

$$x^2=-2z,\ y=0 \quad 和 \quad y=\pm\sqrt{2}x,\ z=0,$$

再作轮廓线

$$x^2=-2\left(z-\frac{9}{4}\right),\ y=3;\ x^2=-2\left(z-\frac{9}{4}\right),\ y=-3$$

和

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1,\ z=-2.$$

于是就可作出图形(见图 7-24).

4·4 二次曲面所围空间区域的简图

在有些实际问题里，时常会遇到由几个曲面块所围成的区域. 这

时需要对这个区域作一个简单的图形. 在一般情况下是很复杂的, 如果区域的边界由几块平面和二次曲面所围成, 那就比较简单. 下面举例说明如何作区域的简图.

【例 10】 先用不等式表示球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 和椭圆抛物面 $x^2+y^2=6z$ 所围的区域, 然后作它的简图.

解: 这两个曲面都是以 z 轴为旋转轴的旋转曲面. 现求它们的交线方程. 由这两个方程消去 x^2+y^2, 得 $z^2+6z-16=0$ 或 $z=2$, $z=-8$. 但由抛物面方程得 $z\geqslant 0$, 故交线所在的平面应是

$$z=2. \qquad (A)$$

又上半球面内部区域适合 $x^2+y^2+z^2<16$, $z\geqslant 0$, 故以 (A) 为底的球冠应适合的区域是

$$2\leqslant z\leqslant \sqrt{16-x^2-y^2}. \qquad (B)$$

另外, z 轴上的一点 $(0, 0, 1)$ 使 $x^2+y^2-6z|_{(0,0,1)}<0$, 故抛物面含 z 轴的区域适合 $x^2+y^2-6z\leqslant 0$, 因此, 以(A) 为底的抛物面的内部所应适合的区域是

$$\frac{1}{6}(x^2+y^2)\leqslant z\leqslant 2. \qquad (C)$$

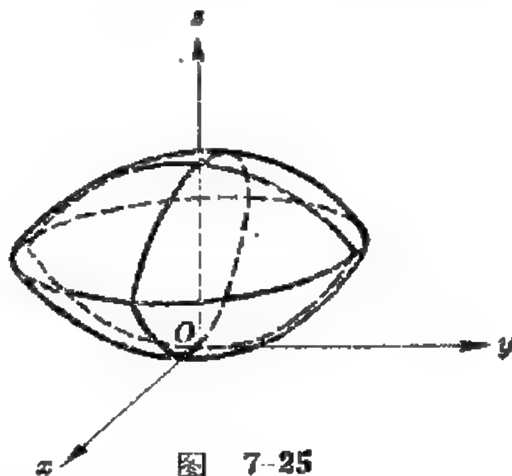


图 7-25

将(B)、(C)合并, 即得所求的区域. 它表示以(A)为底的球冠及以(A)为底的抛物面块合并而成的立体(见图 7-25).

【例 11】 作出由不等式

$$x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0,\ \ z\geqslant 0,\ \ x+y\leqslant 1,\ \ y^2+z^2\leqslant 1$$

所规定的区域简图.

解: 方程 $x+y=1$ 表示过点$(1, 0, 0)$和点$(0, 1, 0)$, 且平行于 z 轴的平面, 于是不等式 $x+y\leqslant 1$ 表示以这个平面为界且包含原点的那半个空间. 方程 $y^2+z^2=1$ 表示以 x 轴为轴、半径为 1 的直圆柱面, 于是不等式 $y^2+z^2\leqslant 1$ 表示这个直圆柱面围成的内部及其表面. 直圆柱面在平面 $x=0$,

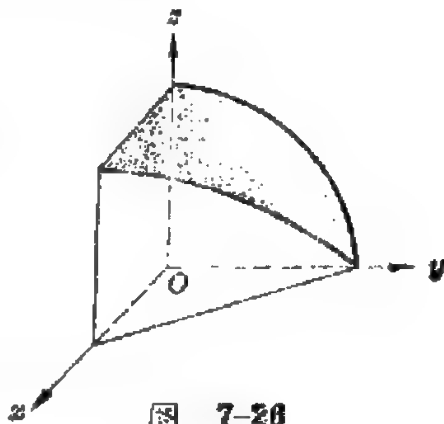


图 7-26

$y=0$ 和 $x+y=1$ 上的平截线分别是圆、直线和椭圆. 平面 $x+y=1$ 在平面 $y=0$ 和 $z=0$ 上的平截线都是直线. 把这五条平截线作出来, 就得区域的简图(见图 7-26).

习 题 7·4

1. 作下列二次曲线的图形:

(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, $z=2$; (2) $x^2-z^2=1$, $y=3$;

(3) $x^2=2(y-1)$, $z=1$.

2. 作下列二次曲面的图形:

(1) $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$; (2) $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$;

(3) $x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$; (4) $z=xy$;

(5) $x^2-\frac{y^2}{4}=z$.

3. 作下列各组曲面所围成的立体图形:

(1) $x+y+z=1$ 与三个坐标面;

(2) $x+y=1$, $z=x^2+y^2$ 与三个坐标面;

(3) $2x+y=4$, $z=4-x^2$ 与三个坐标面;

(4) $x^2+y^2=x$, $z=xy$ 和 $z=0$.

4. 用不等式表示球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=ax$ 所围成的区域.

第五节 二次曲面标准方程小结

前面介绍了五大类二次曲面方程的标准形式, 更详细来分, 则有十七种. 今归纳于下:

1. 有心二次曲面的标准方程

$$Px^2+Qy^2+Rz^2=1,\quad PQR\neq 0 \tag{1}$$

(1) $P>0$, $Q>0$, $R>0$: 椭圆面;

(2) $P>0, Q>0, R<0$; $P>0, Q<0, R>0$; $P<0, Q>0, R>0$：单叶双曲面；

(3) $P<0, Q<0, R>0$; $P<0, Q>0, R<0$; $P>0, Q<0, R<0$：双叶双曲面；

(4) $P<0, Q<0, R<0$：无实轨迹(虚椭圆面)。

2．无心二次曲面的标准方程

$$Px^2+Qy^2=2Rz, \quad PQR\neq 0 \tag{2}$$

(1) $P>0, Q>0$; $P<0, Q<0$：椭圆抛物面；

(2) $P>0, Q<0$; $P<0, Q>0$：双曲抛物面。

3．二次柱面的标准方程

(1)
$$Px^2+Qy^2=1, \quad PQ\neq 0 \tag{3}$$

(i) $P>0, Q>0$：椭圆柱面；

(ii) $P>0, Q<0$; $P<0, Q>0$：双曲柱面；

(iii) $P<0, Q<0$：无实轨迹(虚椭圆柱面)。

(2) $y^2=2px, p\neq 0$：抛物柱面。 (4)

4．二次(代数)锥面的标准方程

$$Px^2+Qy^2+Rz^2=0, \quad PQR\neq 0 \tag{5}$$

(1) P、Q、R 不都同号：实锥面；

(2) P、Q、R 都同号：虚锥面(点椭圆面)。

5．二次变态曲面(两个平面)的标准方程

(1)
$$Px^2+Qy^2=0, \quad PQ\neq 0 \tag{6}$$

(i) P、Q 异号：一对相交平面；

(ii) P、Q 同号：无实轨迹(一对虚平面或一条实直线)。

(2)
$$x^2=k \tag{7}$$

(i) $k>0$：一对实平行平面；

(ii) $k=0$：一对重合平面；

(iii) $k<0$：无实轨迹(一对虚平行平面)。

注意 前四类称为二次常态曲面。

【例 1】 求到定平面与定直线的距离之比为常数的点的轨迹，并说明其形状。

解：设动点到定平面及定直线的距离之比是 $\lambda(>0)$。根据定平面及定直线的不同位置可分三种情况讨论：

1．定直线与定平面相交：以交点为原点，定直线为 z 轴而建立坐标系，于是定平面方程可以写作 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$。又动点 (x, y, z) 到定平面及 z 轴的距离分别是

$$|x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma| \quad 和 \quad \sqrt{x^2+y^2}.$$

于是，由假设，得

$$|x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma|=\lambda\sqrt{x^2+y^2},$$

即
$$(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2=\lambda^2(x^2+y^2).$$

此是 x, y, z 的齐次方程，故表示以原点为顶点的二次代数锥面。

2．定直线与定平面平行：以定直线为 x 轴，过定直线和定平面平行的平面为 xy 面而建立坐标系。于是定平面方程可以写成 $z=k(\neq 0)$。则动点 (x, y, z) 到定平面及 x 轴的距离分别是 $|z-k|$ 及 $\sqrt{y^2+z^2}$。于是由假设，得 $|z-k|=\lambda\sqrt{y^2+z^2}$，即

$$\lambda^2y^2+(\lambda^2-1)z^2+2kz-k^2=0.$$

(1) 设 $\lambda=1$：则有 $y^2=-2kz+k^2$，即 $y^2=-2k\left(z-\frac{k}{2}\right)$。这表示抛物柱面。

(2) 设 $\lambda\neq 1$：则有

$$\lambda^2y^2+(\lambda^2-1)\left(z+\frac{k}{\lambda^2-1}\right)^2=\frac{k^2\lambda^2}{\lambda^2-1}.$$

在 $\lambda>1$ 时，表示椭圆柱面；$\lambda<1$ 时，表示双曲柱面.

3. 定直线在定平面上：以定直线为 x 轴，定平面为 xy 面而建立坐标系. 动点到 x 轴的距离是 $\sqrt{y^2+z^2}$；到 xy 面的距离是 $|z|$，由假设，得 $|z|=\lambda\sqrt{y^2+z^2}$，即

$$\lambda^2y^2+(\lambda^2-1)z^2=0.$$

(1) 设 $\lambda=1$：表示一对重合平面；

(2) 设 $\lambda<1$：表示一对相交平面；

(3) 设 $\lambda>1$：表示一对虚平面.

注意 在 $\lambda=0$ 时，动点在定平面而不在定直线上，轨迹可以说是原定平面；在 $\lambda\to\infty$ 时，动点在定直线而不在原平面上，轨迹可以说是原定直线.

习 题 7·5

1. 说明下列曲面的形状：

(1) $z^2-3z+2=0$； (2) $x^2-y^2+z^2-2x-2y=0$；

(3) $x^2-y^2+z^2+2x-2y+2z+1=0$；

(4) $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+1=0$；

(5) $x^2-y^2-z^2+2x-2y-2z+1=0$；

(6) $x^2+yz=0$；

(7) $z^2=x+y$； (8) $z^2=x^2+xy+y^2$.

2. 就 λ 值说明下列曲面的形状：

(1) $3x^2-4y^2=5z^2+\lambda$； (2) $x^2-4y^2=5z^2+2\lambda x$；

(3) $x^2+y^2+3z^2=x+\lambda$.

*3. 就 a、b、c 的值说明下列曲面的形状：

(1) $a(x+y)^2+b(x-y)^2+cz^2=1 \quad (abc\neq0)$；

(2) $a(y-2x)^2+b(x+2y)^2=2z \quad (ab\neq0)$.

[提示：在 xy 面上作轴的旋转.]

4. 说明下列曲线的形状：

(1) $x^2-y^2=a^2,\ z=a$； (2) $x^2+y^2=a^2,\ z^2=k,\ k>0$；

(3) $y=x^3,\ z=1$;　　　　(4) $x^2+y^2-z^2=a^2,\ x^2+y^2=2z^2$;

(5) $x^2+y^2=2z,\ x^2+y^2=z^2$;

(6) $x^2+y^2-z^2=a^2,\ x^2-y^2+z^2=b^2$;

*(7) $x^2+y^2=z^2,\ x^2-y^2=z^2$.

5．求到定点及定平面的距离之比为常数的点的轨迹，并说明其形状．[提示：分定点在定平面上和不在定平面上两种情况考虑．参看复习题一第14题．]

6．求到定点及定直线的距离之比为常数的点的轨迹，并说明形状．（参看复习题一第15题．）

本章提要

1．根据曲线产生曲面的观点，本章建立了三种有心二次曲面和两种无心二次曲面．连同二次代数锥面二次柱面和变态二次曲面共有五大类十七种二次曲面．

2．二次曲面中只有单叶双曲面和双曲抛物面是具有两族母线的直纹曲面．二次柱面和二次代数锥面是具有一族母线的直纹曲面，其中还有五种是二次旋转曲面（见第六章第五节）．而旋转单叶双曲面、直圆柱面和直圆锥面既是直纹曲面又是旋转曲面．

3．就标准方程研究五种常态二次曲面的几何性质，特别是它们的直纹性．

4．熟记十七种二次曲面的标准方程．并能对一些二次方程经过简单坐标变换化成标准方程，从而认识它们的图形．

复习题七

1．求证

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad 和 \quad x^2+y^2=2az$$

的交线是两个圆，并求所在平面的方程．

2．求证

$$xy+xz+x+y+1=0$$

是直纹曲面，且求它的母线方程．

3. 如果 $a>b>c$，则

$$x^2+y^2+z^2=b^2 \quad 和 \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的交线是两条平面曲线，且求所在平面的方程.

4. 求与两异面直线都相切的球面的球心轨迹.

5. 由定点 $P(a, b, c)$ 作方向余弦为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 的直线与 $Px^2+Qy^2+Rz^2=1$ 交于 A、B. 求证有向线段 PA、PB 的大小是一个二次方程的两个根.

6. 在上题中，由中心作弦 $OD \parallel PAB$，求证 $PA\cdot PB:OD^2$ 是常数.

7. 由椭圆面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的中心沿方向余弦是 λ、μ、ν 的射线到曲面的距离为 r. 求证 $\frac{1}{r^2}=\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}$.

8. 由椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的中心作三条两两垂直的射线，交曲面于 P_1、P_2、P_3. 设 $OP_1=r_1$，$OP_2=r_2$，$OP_3=r_3$. 求证 $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

9. 设有中心二次曲面族

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \quad (a>b>c>0),$$

其中 λ 是参数. 判断 λ 为何值时应除去？为何值时，表示椭圆面？为何值时，表示单叶双曲面？为何值时，表示双叶双曲面？

10. 设有无心二次曲面族

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=2z-\lambda \quad (a>b>0),$$

其中 λ 是参数. 判断 λ 为何值时应除去？为何值时，表示椭圆抛物面？为何值时，表示双曲抛物面？

11. 求椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>b>c>0)$$

与 $z=0$ 平行的轮廓线的焦点的轨迹.

*12. 求证 $z=y(x-y)$ 表示双曲抛物面.

[提示：在 xy 面上以 $x=0$, $x-y=0$ 的内、外平分角线为新轴而作旋转.]

思 考 题 七

1. 推证三类中心二次曲面只有单叶双曲面是直纹曲面；两类无心二次曲面只有双曲抛物面是直纹曲面.
2. 讨论 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>b>c>0)$ 的平截线是圆的情况.
3. 讨论 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 的平截线的主轴长.
4. 就 $ax^2+by^2=2z$ 研究前两题中所提的问题.

第八章

二次曲面普遍方程的研究[注]

前几章用曲线产生曲面的方法，建立了四类二次常态曲面；由点的轨迹建立了平面，且将两个平面看作二次变态曲面．于是在第七章第五节里总结为五类、十七种二次曲面，并列出了它们的标准方程．

现在将三元二次方程

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy$$
$$+2wz+d=0 \quad (a^2+b^2+c^2+f^2+g^2+h^2\neq 0) \qquad (*)$$

叫做二次曲面的普遍方程，并将(*)所表示的曲面称为普遍的二次曲面．在这一章里要讨论它的一些几何性质，如切面、法线、径平面、中心、主平面等等，并且研究它的分类与判定问题，其中有些地方同关于二次曲线普遍方程的讨论相类似．通过在三维空间关于二次曲面普遍方程的研究方法，就比较容易地推广到对 n 维空间二次超曲面普遍方程的研究．

第一节　直线和普遍二次曲面的相关位置

今将二次曲面

$$F(x,\ y,\ z)\equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$$
$$+2ux+2vy+2wz+d=0$$
$$(a^2+b^2+c^2+f^2+g^2+h^2\neq 0) \qquad (1)$$

简写作

[注]　本章理论性较强，运算较繁，初学者可先略去不读。

$$F(x, y, z)\equiv\phi(x, y, z)+2ux+2vy+2wz+d=0.$$

这里

$$\phi(x, y, z)\equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy \tag{2}$$

是三元二次齐次多项式. 在本章里, $F(x, y, z)$ 及 $\phi(x, y, z)$ 分别表示这两个特定多项式而不作别用.

现研究过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的方向余弦是 λ, μ, ν 的直线

$$x=x_0+\lambda t, \quad y=y_0+\mu t, \quad z=z_0+\nu t \tag{3}$$

和(1)的相关位置. 将(3)代入(1), 得 t 的二次方程

$$Qt^2+2Rt+S=0, \tag{4}$$

这里

$$\left\{\begin{aligned} &Q=\phi(\lambda, \mu, \nu)\\ &R=\lambda(ax_0+hy_0+gz_0+u)+\mu(hx_0+by_0+fz_0+v)\\ &\qquad+\nu(gx_0+fy_0+cz_0+w)\\ &\quad=\frac{1}{2}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial x_0}+\mu\frac{\partial F}{\partial y_0}+\nu\frac{\partial F}{\partial z_0}\right)^{[注]}\\ &S=F(x_0, y_0, z_0)\end{aligned}\right. \tag{5}$$

方程(4)中 t 的两个值是 P_0 点与(3)、(1)的两个交点所构成的有向线段的大小.

当 $Q\neq 0$ 时, 根据 R^2-QS 大于零、等于零或小于零, 则(3)与(1)分别有两个不同交点、一个交点(看作两个点的重合)或无交点, 从而(3)分别叫做(1)的割线、切线或离线.

当 $Q=0$、$R\neq 0$ 时, t 的一个根趋于无穷, 此时(3)叫做

[注] $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$, $\frac{\partial F}{\partial z_0}$ 是 $F(x, y, z)$ 的三个偏导数. 如果读者没有学过就理解为三个记号:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}=2(ax_0+hy_0+gz_0+u), \quad \frac{\partial F}{\partial y_0}=2(hx_0+by_0+fz_0+v),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_0}=2(gx_0+fy_0+cz_0+w).$$

(1)的一个交点趋于无穷的割线。

当 $Q=R=0$、$S\neq 0$ 时，t 的两个根趋于无穷，此时(3)叫做(1)的渐近线。

当 $Q=R=S=0$ 时，t 的任何值都适合方程 (4)，所以直线(3)完全在曲面(1)上，故叫做(1)的母线。

注意 曲面 $F(x, y, z)=0$ 上的一点 (x_0, y_0, z_0) 适合 $\frac{\partial F}{\partial x_0}=\frac{\partial F}{\partial y_0}=\frac{\partial F}{\partial z_0}=0$ 时，此点叫做奇异点，在奇异点处 $R=0$。

【例 1】 讨论三个坐标轴与二次柱面 $y^2+z^2-z=0$ 的相关位置。

解：通过原点，方向余弦是 λ、μ、ν 的直线方程是 $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$，此时(4)可以写作 $(\mu^2+\nu^2)t^2-\nu t=0$。

1．关于 x 轴：$\mu=\nu=0$，故 x 轴是母线。

2．关于 y 轴：$\nu=\lambda=0$，且 $\mu^2+\nu^2\neq 0$、$\nu^2-4(\mu^2+\nu^2)\times 0=0$，故 y 轴是切线。

3．关于 z 轴：$\lambda=\mu=0$，而且 $\mu^2+\nu^2\neq 0$、$\nu^2-4(\mu^2+\nu^2)\times 0\neq 0$，故 z 轴是割线。

【例 2】 如果有心二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 具有母线，则它必是单叶双曲面，并求母线方程。

【证及解】 过曲面上的任一点 (x_0, y_0, z_0) 的直线 (3) 如果是母线，则必在曲面上。由(5)得

$$a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2=0, \tag{A}$$

$$a\lambda x_0+b\mu y_0+c\nu z_0=0, \tag{B}$$

$$ax_0^2+by_0^2+cz_0^2-1=0. \tag{C}$$

将(A)、(B)及(C)代入拉格朗日恒等式

$$(a\lambda^2+b\mu^2)(ax_0^2+by_0^2)-(a\lambda x_0+b\mu y_0)^2$$
$$=ab(\mu x_0-\lambda y_0)^2,$$

得到 $$-c\nu^2(1-cz_0^2)-(c\nu z_0)^2=ab(\mu x_0-\lambda y_0)^2,$$

即

$$-c\nu^2=ab(\mu x_0-\lambda y_0)^2. \tag{D}$$

由于 λ、μ、ν 都是实数，故 ab 与 c 反号，也就是 a、b、c 三数中两个是正，一个是负，因此 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 表示单叶双曲面．下面推求过(x_0, y_0, z_0)的母线方程，也就是推求 $\lambda:\mu:\nu$．由(B)及(D)得

$$\frac{\lambda}{\pm by_0\sqrt{\frac{-c}{ab}}+cz_0x_0}=\frac{\mu}{\mp ax_0\sqrt{\frac{-c}{ab}}+cy_0z_0}$$
$$=\frac{\nu}{-(ax_0^2+by_0^2)},$$

代入(3)即得母线方程．

【例 3】 求证从原点作两个双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm1$$

的渐近线必产生一个二次锥面(叫做渐近锥面)．并说明这三者的关系．

【证及解】 对单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{A}$$

来说，过原点的直线 $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$ 是渐近线，则(5)式中的 $Q=R=0$，即

$$\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}-\frac{\nu^2}{c^2}=0.$$

故渐近线必产生二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{B}$$

同理可证：过原点作双叶双曲面

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{C}$$

的渐近线也产生(B)式所表示的二次锥面。

现研究(A)、(B)、(C)和平面 $z=k\ (|k|>c)$ 所产生的平截线的关系。将 $z=k$ 代入(A)、(B)、(C)，得方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}+1,\quad z=k;$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2},\quad z=k;$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1,\quad z=k.$$

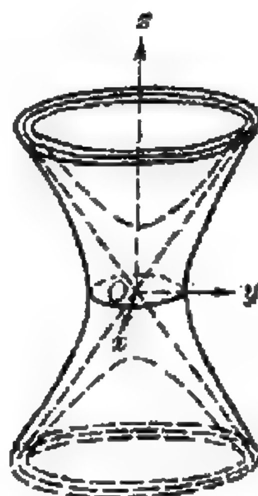


图 8-1

由三个平截线可以看出

$$\frac{k^2}{c^2}+1>\frac{k^2}{c^2}>\frac{k^2}{c^2}-1.$$

因此(A)在外部，(C)在内部，而(B)在中间(见图8-1)。

习 题 8·1

1. 讨论直线 $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$ 与锥面 $ax^2+by^2+cz^2=0$ 的相关位置。
2. 求直线 (1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{-1}$，(2) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-1}{1}$ 与曲面 $(x+y+z)(2x+y-z)=6z$ 的相关位置。
3. 求证 (x_0, y_0, z_0) 是二次锥面 $a(x-x_0)^2+b(y-y_0)^2+c(z-z_0)^2=0$ 的奇异点。
4. 二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2=0$ 与 $x^2-y^2=0$ 有无奇异点?
5. 如果无心二次曲面 $ax^2+by^2=2z$ 具有母线，证明它必是双曲抛物

面，并求母线方程.

*6. 先证 $yz+2zx+3xy+6=0$ 是直纹曲面，再求过 $(-1, 0, 3)$ 的母线方程.

第二节 平面和普遍二次曲面的相关位置

2·1 普遍二次曲面的平截线的性质

定理 1 普遍二次曲面的平截线是二次曲线.

【证】 由第五章第 4 节例 6 知：任何平面都可作为 xy 面，即 $z=0$. 但经过形如第五章第四节公式(9)的坐标变换，上节 (1) 式的形式不变，故此问题可化为讨论上节 (1) 式与 $z=0$ 的交线的形状.

在上节(1)中，令 $z=0$，则得

$$ax^2+2hxy+by^2+2ux+2vy+d=0,\ z=0.$$

此即二次曲线.】

定理 2 普遍二次曲面被平行平面所截，则所得到的平截线必是属于同一类型的二次曲线.

【证】 与定理 1 相同，只须研究平行平面 $z=k$ (k 是参数)上的平截线. 在上节方程(1)内设 $z=k$，则平截线的方程是

$$ax^2+2hxy+by^2+2(gk+u)x+2(fk+v)y$$
$$+ck^2+2wk+d=0,\ z=k$$

或 $$ax^2+2hxy+by^2+2u'x+2v'y+d'=0,\ z=k.$$

这里 u'、v'、d' 为 k 的函数，由此可知：$I_2=ab-h^2$ 不随 k 变化，故平截线必属于同一类型的二次曲线.】

2·2 二次曲面的切面和法线

与二次曲线的切线和法线非常类似，在此引进二次曲面

的切面和法线的概念. 先证明下面一个定理.

定理3 过二次曲面上的非奇异点所作的切线必产生一个平面.

【证】 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是上节 (1) 式上的一点，于是由上节公式(5)得 $S=0$. 设上节公式(3)是过 P_0 的切线，则有 $Q\neq 0$, $R^2-QS=0$, 即 $R=0$. 故有

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial x_0}+\mu\frac{\partial F}{\partial y_0}+\nu\frac{\partial F}{\partial z_0}=0. \tag{A}$$

当 λ, μ, ν 变化时，即得过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$的无数条切线. 由(A)及上节公式(3)消去 λ、μ、ν, 即得切线所产生的曲面

$$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y_0}+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z_0}=0. \tag{1}$$

由于 P_0 不是奇异点，所以 $\frac{\partial F}{\partial x_0}$、$\frac{\partial F}{\partial y_0}$ 和 $\frac{\partial F}{\partial z_0}$ 不能同时为零，故(1)表示一平面. 】

定义 (1) 叫做 $F(x, y, z)=0$ 关于非奇异点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切面.

推论1 有心二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 上的一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$的切面方程是

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=1. \tag{2}$$

推论2 无心二次曲面 $ax^2+by^2=2z$ 上的一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$的切面方程是

$$ax_0x+by_0y=z+z_0. \tag{3}$$

定理4 平面 $lx+my+nz=p$ 与 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 相切的充要条件是

$$\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}=p^2. \tag{4}$$

【证】 以(x_0, y_0, z_0)为切点的切面可以写成

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=1. \tag{A}$$

于是(A)与已知平面重合的充要条件是

$$x_0=\frac{l}{ap},\quad y_0=\frac{m}{bp},\quad z_0=\frac{n}{cp}. \tag{B}$$

但(x_0, y_0, z_0)在二次曲面上，故

$$ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1. \tag{C}$$

将(B)代入(C)即得(4). ■

推论 与平面 $lx+my+nz=p$ 平行的二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 的切面是

$$lx+my+nz=\pm\sqrt{\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}}. \tag{5}$$

同理可证

定理 5 平面 $lx+my+nz=p$ 与 $ax^2+by^2=2z$ 相切的充要条件是

$$\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+2np=0. \tag{6}$$

推论 与平面 $lx+my+nz=p$ 平行的二次曲面 $ax^2+by^2=2z$ 的切面是

$$lx+my+nz=\frac{-1}{2n}\left(\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}\right). \tag{7}$$

【例 1】 从椭圆面中心到切面作垂线，求垂足轨迹[称为垂足曲面或弗锐斯内尔(Fresnel)弹性曲面].

解：过椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上的一点(x_0, y_0, z_0)的切面是

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1. \tag{A}$$

由原点到切面所作的垂线是

$$\frac{x}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z}{\frac{z_0}{c^2}}(=k). \tag{B}$$

由于椭圆面过(x_0, y_0, z_0)，有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1. \tag{C}$$

从(A)、(B)、(C)消去x_0、y_0、z_0和k，即得所求的轨迹．由(B)得

$$x_0=\frac{a^2x}{k},\ y_0=\frac{b^2y}{k},\ z_0=\frac{c^2z}{k},$$

代入(A)及(C)，分别得

$$x^2+y^2+z^2=k \quad 与 \quad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=k^2.$$

再从这两个方程消去k，即得所求的轨迹方程为

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

这表示四次曲面．

【例2】 求有心二次曲面的三个两两垂直的切面的轨迹[称为准球面或蒙日(Monge)球面]．

解：由(5)式，设

$$\lambda_ix+\mu_iy+\nu_iz=\sqrt{\frac{\lambda_i^2}{a}+\frac{\mu_i^2}{b}+\frac{\nu_i^2}{c}} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{A}$$

是有心二次曲面

$$ax^2+by^2+cz^2=1$$

的三个两两垂直的切面，这里

$$\lambda_i^2+\mu_i^2+\nu_i^2=1,$$

于是有

$$\lambda_2\lambda_3+\mu_2\mu_3+\nu_2\nu_3=0,\ \lambda_3\lambda_1+\mu_3\mu_1+\nu_3\nu_1=0,$$

$$\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0.$$

将(A)中三式平方相加，并利用第五章第四节公式(4)和(5)，即得

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

这表示一个球面.

【例 3】 求证单叶双曲面上一点的切面必含过该点的两条母线.

【证】 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

上的一点 $P(a\cos\theta\cdot\sec\phi,\ b\sin\theta\cdot\sec\phi,\ c\,\mathrm{tg}\,\phi)$ 的切面是

$$\frac{\cos\theta\cdot\sec\phi}{a}x+\frac{\sin\theta\cdot\sec\phi}{b}y-\frac{\mathrm{tg}\,\phi}{c}z=1.$$

由习题 8·1 的第 6 题可知, 过 P 点的两条母线方程是

$$\frac{x-a\cos\theta\cdot\sec\phi}{a\sin(\theta\pm\phi)}=\frac{y-b\sin\theta\cdot\sec\phi}{-b\cos(\theta\pm\phi)}=\frac{z-c\,\mathrm{tg}\,\phi}{\pm c}.$$

容易证明这两条母线在切面上. ▌

仿照平面解析几何, 我们规定

定义 过二次曲面上的一点与该点处切面垂直的直线叫做法线.

定理 6 $F(x,y,z)=0$ 在非奇异点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x_0}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial y_0}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial z_0}}. \tag{8}$$

推论 1 有心二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 上一点 (x_0,y_0,z_0) 的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}. \tag{9}$$

推论 2 无心二次曲面 $ax^2+by^2=2z$ 上一点 (x_0,y_0,z_0) 的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{10}$$

【例 4】 设椭圆面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上一点 P_0 的法线与三主平面分别交于 G_1、G_2 和 G_3. 求证 $P_0G_1:P_0G_2:P_0G_3$ 是定比.

【证】 由(9)过 P_0 的法线是

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}},$$

或者改写作方向余弦的形式

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)p}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{y_0}{b^2}\right)p}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{z_0}{c^2}\right)p}.$$

这里
$$p^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}\right)=1,$$

于是法线的参数方程可以写成

$$x=x_0+\frac{x_0pt}{a^2},\quad y=y_0+\frac{y_0pt}{b^2},\quad z=z_0+\frac{z_0pt}{c^2}.$$

由于主平面是三个坐标面, 令 $x=0$, 则 $t=-\frac{a^2}{p}$, 即得 $P_0G_1=-\frac{a^2}{p}$, 同理, $P_0G_2=-\frac{b^2}{p}$, $P_0G_3=-\frac{c^2}{p}$. 于是

$$P_0G_1:P_0G_2:P_0G_3=a^2:b^2:c^2 \text{ 为定比.}$$ 】

习 题 8·2

1. 求曲面(1) $xy=cz$; (2) $x^2+2yz=a^2$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切面方程.
2. 证明二次柱面和二次锥面上任一点处的母线必在切面上.
3. 证明双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 上一点的切面必包含过该点的两条母线.

4. 在例 4 中，(1) 求证 p 恰是原点到 P_0 的切面的距离；(2) 设 $P_0G_1^2+P_0G_2^2+P_0G_3^2=k^2$，求 P_0 的轨迹方程.

5. 求证平面 $8x-6y-z=5$ 与抛物面 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=z$ 相切，并求切点的坐标.

6. 求证无心二次曲面三个两两垂直的切面的交点的轨迹是一平面.

7. 求原点到曲面 $kz=xy$ 的切面的垂足的轨迹(垂足曲面).

8. 求过直线 $x+9y-3z=0$, $3x-3y+6z-5=0$ 的二次曲面 $2x^2-6y^2+3z^2=5$ 的切面. [提示: 利用平面束.]

*9. 设椭圆面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的一对垂直切面的交线过定点 $(0, 0, k)$. 求证这交线必产生锥面

$$x^2(b^2+c^2-k^2)+y^2(c^2+a^2-k^2)+(z-k)^2(a^2+b^2)=0.$$

*10. 求证从点 (x_0, y_0, z_0) 到抛物面 $ax^2+by^2=2z$ 所作的切线，产生曲面

$$(ax^2+by^2-2z)(ax_0^2+by_0^2-2z_0)=(ax_0x+by_0y-z-z_0)^2.$$

第三节　普遍二次曲面的中心

3·1　径平面

仿照普遍二次曲线，我们将曲面上任意二点所联的线段叫做弦．于是有

定理 1　普遍二次曲面一组平行弦的中点的轨迹是一平面.

【证】 取 λ, μ, ν 为 $F(x, y, z)=0$ 的一组平行弦的方向余弦，并取

$$x=x_0+\lambda t,\ y=y_0+\mu t,\ z=z_0+\nu t \tag{A}$$

作为以 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为中点，λ、μ、ν 为方向余弦的弦 P_1P_2 的方程. 如果 $P_0P_1=t_1$, $P_0P_2=t_2$, 则 $P_0P_1+P_0P_2=0$, 即

$t_1+t_2=0$, 由于 P_1P_2 是弦, $Q\neq 0$, 于是由本章第一节公式(5)可得出

$$\lambda(ax_0+hy_0+gz_0+u)+\mu(hx_0+by_0+fz_0+v)$$
$$+\nu(gx_0+fy_0+cz_0+w)=0. \tag{B}$$

在这里 λ, μ, ν 是常数, 而使 (x_0, y_0, z_0) 变化, 则(A)表示一族平行弦, 故由(B)得诸弦中点的轨迹是

$$\lambda(ax+hy+gz+u)+\mu(hx+by+fz+v)$$
$$+\nu(gx+fy+cz+w)=0 \tag{1}$$

或

$$(a\lambda+h\mu+g\nu)x+(h\lambda+b\mu+f\nu)y+(g\lambda+f\mu+c\nu)z$$
$$+(u\lambda+v\mu+w\nu)=0. \tag{2}$$

当 λ、μ、ν 不是下面方程组

$$a\lambda+h\mu+g\nu=0,\ h\lambda+b\mu+f\nu=0,\ g\lambda+f\mu+c\nu=0$$

的解时, 则(2)式也就是(1)式, 表示一平面. ▌

与普遍二次曲线的直径相当, 我们有

定义 平分普遍二次曲面的一组平行弦的平面, 叫做以该弦的方向为共轭方向的径平面.

【例 1】 已知椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的径平面为 $lx+my+nz=0$. 求对应的共轭方向.

解: 以 λ, μ, ν 为共轭方向的径平面是

$$\frac{\lambda}{a^2}x+\frac{\mu}{b^2}y+\frac{\nu}{c^2}z=0 \quad 与 \quad lx+my+nz=0,$$

将二式相比较, 得

$$\frac{\lambda}{a^2}=l,\ \frac{\mu}{b^2}=m,\ \frac{\nu}{c^2}=n.$$

故所求的共轭方向是 a^2l, b^2m, c^2n.

对于每一个共轭方向 λ, μ, ν，有一个径平面和它对应，由于 λ, μ, ν 有无数多，故二次曲面的径平面也有无数多(正象二次曲线的直径也有无数多一样)。对于这样无数多的径平面有下面的定理：

定理 2 普遍二次曲面的所有径平面形成一个平面族.

【证】 容易看出，当 λ, μ, ν 变化，但不是下列方程组

$$a\lambda+h\mu+g\nu=0,\ h\lambda+b\mu+f\nu=0,\ g\lambda+f\mu+c\nu=0$$

的解时，则径平面的方程(1)表示一个平面族，且这平面族经过以下三个平面

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}\equiv ax+hy+gz+u=0\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}\equiv hx+by+fz+v=0\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial z}\equiv gx+fy+cz+w=0\end{cases}\qquad(3)$$

的交点. 】

定义 (3) 式的交点叫做普遍二次曲面的中心. 当中心在曲面上(即它是奇异点)时，叫做顶点.

3·2 中心

平面解析几何里，普遍二次曲线在非无轨迹的情况，它的中心就是对称中心. 对于普遍二次曲面来说，也是这样. 下面先证明一个判别定理：

定理 3 普遍二次曲面不是无轨迹的情况，且方程中一次项的系数都是零，则原点是它的对称中心；反之，如果原点是对称中心，则 $F(x, y, z)=0$ 所有一次项的系数都是零.

【证】 1. 如果 $F(x, y, z)=0$ 所有一次项的系数都是零，则有

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+d=0.$$

在它上面取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，即有

$$ax_0^2+by_0^2+cz_0^2+2fy_0z_0+2gz_0x_0+2hx_0y_0+d=0$$

或 $$a(-x_0)^2+b(-y_0)^2+c(-z_0)^2+2f(-y_0)(-z_0)$$
$$+2g(-z_0)(-x_0)+2h(-x_0)(-y_0)+d=0.$$

于是 $P_0'(-x_0, -y_0, -z_0)$ 也在这个曲面上，即原点是对称中心.

2. 如果原点是对称中心，设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 $F(x, y, z)=0$ 上的任一点，则 $(-x_0, -y_0, -z_0)$ 也必在这曲面上，于是

$$ax_0^2+by_0^2+cz_0^2+2fy_0z_0+2gz_0x_0+2hx_0y_0+2ux_0$$
$$+2vy_0+2wz_0+d=0,$$

$$a(-x_0)^2+b(-y_0)^2+c(-z_0)^2+2f(-y_0)(-z_0)$$
$$+2g(-z_0)(-x_0)+2h(-x_0)(-y_0)$$
$$+2u(-x_0)+2v(-y_0)+2w(-z_0)+d=0.$$

即 $$\phi(x_0, y_0, z_0)+2ux_0+2vy_0+2wz_0+d=0,$$
$$\phi(x_0, y_0, z_0)-2ux_0-2vy_0-2wz_0+d=0.$$

两式相减，得

$$ux_0+vy_0+wz_0=0. \tag{A}$$

由于 (A) 式除了位于平面 $ux+vy+wz=0$ 上的点适合外，还为 x_0, y_0, z_0 的无数组值所适合，因此 $u=v=w=0$. 故 $F(x, y, z)=0$ 所有一次项的系数都是零. 归纳 1、2，定理得证. ▌

定理 4 普遍二次曲面不是无轨迹的情况，则中心就是它的对称中心；反过来，对称中心就是它的中心.

【证】 1. 设 (x_0, y_0, z_0) 是中心，则由(3)：

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}=\frac{\partial F}{\partial y_0}=\frac{\partial F}{\partial z_0}=0. \tag{B}$$

今以(x_0, y_0, z_0)为新原点，作坐标系的平移

$$x=x'+x_0,\ y=y'+y_0,\ z=z'+z_0,$$

于是 $F(x, y, z)=0$ 化成

$$ax'^2+by'^2+cz'^2+2fy'z'+2gz'x'+2hx'y'$$
$$+2x'(ax_0+hy_0+gz_0+u)+2y'(hx_0+by_0+fz_0+v)$$
$$+2z'(gx_0+fy_0+cz_0+w)+F(x_0, y_0, z_0)=0$$

即

$$\phi(x', y', z')+x'\frac{\partial F}{\partial x_0}+y'\frac{\partial F}{\partial y_0}+z'\frac{\partial F}{\partial z_0}$$
$$+F(x_0, y_0, z_0)=0. \quad \text{(C)}$$

由(B)知(C)所有一次项的系数都是零. 从定理3知：新原点是对称中心，也即中心是对称中心.

2. 如果以对称中心(x_0, y_0, z_0)为新原点，作坐标系的平移，于是 $F(x, y, z)=0$ 仍化成(C)，由于新原点是对称中心，(C)中所有一次项的系数都是零，即 $\frac{\partial F}{\partial x_0}=\frac{\partial F}{\partial y_0}=\frac{\partial F}{\partial z_0}=0$，故知对称中心是中心. ▌

由(3)可知二次曲面的中心由三个平面的交点来确定. 因为三平面具有八种不同的相关位置(见第三章第六节)，故普遍二次曲面的中心也可分多种情况来讨论. 设方程组(3)的系数矩阵和增广矩阵分别是C及A，即

$$C=\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \end{bmatrix}.$$

它们的秩分别记作R_C及R_A，根据R_C及R_A的不同数值和十七类二次曲面的标准方程(见第七章第五节)以及它们的形状，可以归纳成下表：

条件	方程组(3)的解答数	中心的情况		曲面的形状
$R_C=3$	唯一解	一个中心	非顶点	椭圆面(实或虚)、双曲面
			顶点	锥面(实或虚)
$R_C=2$ $R_A=2$	∞^1解[注] (1个参数)	一条直线的中心	非顶点	椭圆柱面(实或虚)、双曲柱面
			顶点	一对相交平面(实或虚)
$R_C=1$ $R_A=1$	∞^2解 (2个参数)	一个平面的中心	非顶点	一对相异或虚平行平面
			顶点	一对重合平面
$R_C=2$ $R_A=3$	无解	没有中心		抛物面
$R_C=1$ $R_A=2$	无解	没有中心		抛物柱面

定义 上表中第一种情况称为中心型二次曲面；第二、第三种情况分别称为第一类、第二类多心型二次曲面；第四、第五种情况分别称为第一类、第二类无心型二次曲面。多心型和无心型二次曲面合称为非中心型二次曲面。

【例 2】 用本节方法证明锥面 $ax^2+by^2+cz^2=0$, $abc\neq0$ 的顶点是原点。

【证】 由方程组(3)得 $ax=0$, $by=0$, $cz=0$. 故中心是 $(0, 0, 0)$，且 $(0, 0, 0)$ 适合 $ax^2+by^2+cz^2=0$，故是顶点。】

【例 3】 试求二次曲面

$$x^2+4y^2-z^2+4yz+2zx+4xy+2x+4y-2z+d=0$$

的中心，并判断此中心是顶点时，d 的值如何？

解：决定中心的方程是

$$x+2y+z+1=0,\ x+2y+z+1=0,\ x+2y-z-1=0.$$

由后两方程得

[注] 这里用 ∞^n 表示含 n 个参数的解。

$$x+2y=0,\quad z+1=0,$$

故有一条直线的中心.

中心可以写作$\left(t,\ -\frac{t}{2},\ -1,\ \right)$,这里 t 是参数. 如果中心在曲面上,则不论 t 的值如何,$d=-1$.

【例 4】 就柱面的标准方程

$$ax^2+by^2=1,\quad ab\neq 0,$$

研究中心的情况.

解: 此时

$$C=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

故得 $R_C=2$, $R_A=2$. 因此有一条直线的中心,它的方程是 $ax=0$, $by=0$, 即 $x=0$, $y=0$, 这表示 z 轴. 又因 z 轴不在柱面上,故具有不是顶点的中心.

下述定理说明二次曲面的中心对于中心型二次曲面的作用.

定理 5 如果 $F(x, y, z)=0$ 是中心型二次曲面,则以中心为新原点,$F(x, y, z)=0$ 化成

$$\phi(x', y', z')+\frac{I_4}{I_3}=0. \tag{4}$$

这里

$$I_3=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$I_4=\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix}. \tag{6}$$

【证】 今以中心(x_0, y_0, z_0)为新原点，则有

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}=\frac{\partial F}{\partial y_0}=\frac{\partial F}{\partial z_0}=0, \qquad \text{(A)}$$

且

$$\begin{aligned}F(x_0, y_0, z_0)&=x_0(ax_0+hy_0+gz_0+u)\\&\quad+y_0(hx_0+by_0+fy_0+v)\\&\quad+z_0(gx_0+fy_0+cz_0+w)\\&\quad+ux_0+vy_0+wz_0+d\\&=\frac{1}{2}\left(x_0\frac{\partial F}{\partial x_0}+y_0\frac{\partial F}{\partial y_0}+z_0\frac{\partial F}{\partial z_0}\right)\\&\quad+ux_0+vy_0+wz_0+d\\&=ux_0+vy_0+wz_0+d.\end{aligned}$$

于是可得

$$\phi(x', y', z')+ux_0+vy_0+wz_0+d=0. \qquad \text{(B)}$$

将(A)和(B)看作是x_0、y_0、z_0的四个三元方程组，因此x_0, y_0, z_0有解的充要条件（见附录第三节）是

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & \phi(x', y', z')+d \end{vmatrix}=0,$$

以最后一列展开成两个行列式，即有

$$\begin{vmatrix} a & h & g & 0 \\ h & b & f & 0 \\ g & f & c & 0 \\ u & v & w & \phi(x', y', z') \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix}=0$$

即

$$I_3\phi(x', y', z')+I_4=0.$$

由于 $F(x, y, z)=0$ 有唯一中心，故 $R_C=3$，即 $I_3\neq 0$，故上式可化成(4)式。】

推论 $F(x, y, z)=0$ 表示二次锥面的充要条件是

$$I_3\neq 0,\ I_4=0. \tag{7}$$

【例 5】 确定 d，使 $x^2-2y^2+z^2-4yz-8zx+4xy-14x-4y+14z+d=0$ 表示一锥面，且求其顶点。

解：在此

$$I_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0,$$

$$I_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 & 7 \\ -7 & -2 & 7 & d \end{vmatrix}=54(d-16).$$

令 $d-16=0$，即得 $d=16$，此时已知曲面表示锥面。中心由 $x+2y-4z-7=0$，$2x-2y-2z-2=0$，$-4x-2y+z+7=0$ 来确定，解之得 $(1, 1, -1)$，且此点在曲面上，即顶点。

【例 6】 求证 $7x^2-8y^2-8z^2-2yz-8zx+8xy-16x+14y-14z-5=0$ 是中心型曲面，并求它在以中心为新原点的坐标系下的方程。

【证及解】 确定中心的方程组(3)是

$$7x+4y-4z-8=0,\ 4x-8y-z+7=0,$$
$$-4x-y-8z-7=0.$$

由(5)及(6)得知

$$I_3=\begin{vmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{vmatrix}=729\neq 0,$$

$$I_4=\begin{vmatrix}7 & 4 & -4 & -8\\ 4 & -8 & -1 & 7\\ -4 & -1 & -8 & -7\\ -8 & 7 & -7 & -5\end{vmatrix}=9\times 729,$$

故中心是唯一的．解上述方程组，得$(0,\ 1,\ -1)$，故已知曲面是中心型曲面．以中心为新原点，由(4)式得新系下的方程为

$$7x'^2-8y'^2-8z'^2-2y'z'-8z'x'+8x'y'+9=0.$$

习　题　8·3

1．求下列曲面的中心

(1) $14x^2+14y^2+8z^2-4yz-4zx-8xy+18x-18y+5=0$;

(2) $2x^2+20y^2+18z^2-12yz+12xy+22x+6y-2z-2=0$;

(3) $5x^2+26y^2+10z^2+4yz+14zx+6xy-8x-18y-10z+4=0$;

(4) $x^2+y^2+z^2-2yz+2zx-2xy-2x-4y-2z+3=0$;

(5) $x^2+y^2+z^2-2yz+2zx-2xy-2x+2y-2z-3=0$.

2．证明上题中(1)是中心型曲面，并求它在以中心为新原点的新系下的方程．

3．就 (1) $ax^2+by^2+cz^2=1$; (2) $ax^2+by^2=2z$ 研究中心的情况．

4．求证 $F(x,\ y,\ z)=0$ 以直线 $l_1x+m_1y+n_1z=0$, $l_2x+m_2y+n_2z=0$ 的方向为共轭方向的径平面是

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0.$$

5．已知二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$，求证三个坐标面是径平面，且求所对应的共轭方向．

6．确定 d，使 $2y^2+4zx+2x-4y+6z+d=0$ 表示一锥面，且求顶点坐标．

*7．求 $F(x,\ y,\ z)=0$ 的径平面不存在的充要条件．当径平面不存在时，求所对应的共轭方向．

*8. 设有曲面族 $x^2+y^2+z^2-R^2+\lambda z(x+\mu y-a)=0$，其中 λ, μ 是参数；R, a 是常数．求中心的轨迹方程．并说明它的形状．

[提示：利用(3)式消去 λ 和 μ.]

第四节　普遍二次曲面的主方向

4·1　主平面

在椭圆面的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的讨论中，我们知道：坐标面是它的对称平面，且叫做主平面．现在为了简化 $F(x, y, z)=0$，首先推求它的对称平面，因此我们规定

定义　如果一个普遍二次曲面的径平面垂直于所平分的弦，则叫做主平面．

定理1　一个二次曲面至少有一个确定的主平面．

【证】　由本章第三节径平面方程(2)可知，它与所平分的弦垂直的充要条件是

$$\frac{a\lambda+h\mu+g\nu}{\lambda}=\frac{h\lambda+b\mu+f\nu}{\mu}=\frac{g\lambda+f\mu+c\nu}{\nu}=k, \tag{1}$$

即

$$\begin{cases}(a-k)\lambda+h\mu+g\nu=0,\\ h\lambda+(b-k)\mu+f\nu=0,\\ g\lambda+f\mu+(c-k)\nu=0.\end{cases} \tag{2}$$

此是 λ, μ, ν 的齐次方程组，它有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix}a-k & h & g\\ h & b-k & f\\ g & f & c-k\end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

将(3)依 k 的降幂展开，得

$$k^3-k^2(a+b+c)+k(bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2)-I_3=0$$

或

$$k^3-k^2(a+b+c)+k(A+B+C)-I_3=0. \qquad (4)$$

这里 A, B, C 是 I_3 中 a, b, c 的代数余子式. (3)或(4)叫做 $F(x, y, z)=0$ 的特征方程,它的根叫特征根. 由附录第四节可知:特征根均是实根,且不能全是零(即至少有一个不是零).

当 k 求出后,利用不是零的 k 值,由(2)即可求出 $\lambda:\mu:\nu$ 的值. 因此主平面方程可以写成

$$k(\lambda x+\mu y+\nu z)+\lambda u+\mu v+\nu w=0. \qquad (5)$$

而且知道 $F(x, y, z)=0$ 至少有一个确定的主平面. 】

注意 $F(x, y, z)=0$ 最多有三个主平面,并且每两个主平面的交线叫主轴. $F(x, y, z)=0$ 最多有三个主轴.

4·2 主方向

定义 对于特征根 k, 由方程组(2)所确定的一组 $\lambda:\mu:\nu$ 作分量,所组成的向量,叫该特征根所对应的特征向量,它的方向叫主方向.

【例 1】 求二次曲面 $2y^2-2yz+2zx-2xy+2x+y-3z-5=0$ 的主方向和主平面.

解:特征方程是

$$\begin{vmatrix} -k & -1 & 1 \\ -1 & 2-k & -1 \\ 1 & -1 & -k \end{vmatrix} = -k(k^2-2k-3)=0.$$

特征根是 $k_1=3$, $k_2=-1$, $k_3=0$.

由(2)得 $k_1=3$ 所对应的主方向的方向余弦 λ_1、μ_1、ν_1 适合

$$-3\lambda_1-\mu_1+\nu_1=0,\ -\lambda_1-\mu_1-\nu_1=0,\ \lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=1.$$

从上三式解得

$$\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \mu_1=\frac{-2}{\sqrt{6}},\quad \nu_1=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

同理，由 k_2 得：

$$\lambda_2=\frac{-1}{\sqrt{2}},\quad \mu_2=0,\quad \nu_2=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

由 k_3 得：
$$\lambda_3=\frac{-1}{\sqrt{3}},\quad \mu_3=\frac{-1}{\sqrt{3}},\quad \nu_3=\frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

k_1 所对应的主平面是 $2(x-2y+z)-1=0$；k_2 所对应的主平面是 $2(x-z)-5=0$。

为方便起见，我们把确定主方向的方程(1)写成

$$\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial\lambda}}{2\lambda}=\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial\mu}}{2\mu}=\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}}{2\nu}=k\text{[注]}. \tag{6}$$

下面研究主方向的一些性质：

定理 2 设 k 是一个特征根，且 $\lambda,\ \mu,\ \nu$ 是它所对应的主方向的方向余弦，则 $k=\phi(\lambda,\ \mu,\ \nu)$。

【证】 利用比例的性质，由(6)得

$$k=\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial\lambda}}{2\lambda}=\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial\mu}}{2\mu}=\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}}{2\nu}=\frac{\lambda\dfrac{\partial\phi}{\partial\lambda}+\mu\dfrac{\partial\phi}{\partial\mu}+\nu\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}}{2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}$$
$$=\phi(\lambda,\ \mu,\ \nu).\ \blacksquare$$

定理 3 两个不相等的特征根所对应的主方向必垂直。

【证】 设 k_1 和 k_2 是两个不相等的特征根，且 $\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1$ 和 $\lambda_2,\ \mu_2,\ \nu_2$ 分别是它们所对应的主方向的方向余弦，则

[注] 这里仍用 $\phi(\lambda,\ \mu,\ \nu)$ 的三个偏导数，如果读者没有学过，就理解为

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}=2(a\lambda+h\mu+g\nu),\quad \frac{\partial\phi}{\partial\mu}=2(h\lambda+b\mu+f\nu),\quad \frac{\partial\phi}{\partial\nu}=2(g\lambda+f\mu+c\nu).$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_1}=2k_1\lambda_1,\ \frac{\partial\phi}{\partial\mu_1}=2k_1\mu_1,\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu_1}=2k_1\nu_1;$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_2}=2k_2\lambda_2,\ \frac{\partial\phi}{\partial\mu_2}=2k_2\mu_2,\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu_2}=2k_2\nu_2.$$

将第一行三个等式的两端分别乘以 λ_2, μ_2, ν_2; 第二行三个等式的两端分别乘以 λ_1, μ_1, ν_1, 然后将各行的三个等式相加，因而有恒等式

$$\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_2}+\mu_1\frac{\partial\phi}{\partial\mu_2}+\nu_1\frac{\partial\phi}{\partial\nu_2}=\lambda_2\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_1}+\mu_2\frac{\partial\phi}{\partial\mu_1}+\nu_2\frac{\partial\phi}{\partial\nu_1},$$

从而得

$$2k_1(\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2)=2k_2(\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2).$$

即
$$(k_1-k_2)(\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2)=0.$$

但 $k_1\neq k_2$, 所以 $\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0$, 从而定理得证. 】

下面讨论主方向的各种情形:

1. 设 k_1 是单根，则方阵

$$M_1=\begin{bmatrix} a-k_1 & h & g \\ h & b-k_1 & f \\ g & f & c-k_1 \end{bmatrix}$$

的秩是 2 (见附录第四节)，即至少有一个二阶行列式不是零，于是当 $k=k_1$ 时，由方程组 (2) 取含该行列式的两个方程解之，即得 $\lambda_1:\mu_1:\nu_1$ 一组解.

2. 设 k_1 是二重根，则方阵 M_1 的秩是 1, 于是 $k=k_1$ 时, (2) 化成一式，它有无数解.

3. 设 k_1 是三重根，则方阵 M_1 的秩是 0, 于是 $k=k_1$ 时, (2) 有任意解.

总结起来，可以得到:

1. 当 k_1, k_2, k_3 都不相同时，可以适当选取 k_1, k_2, k_3 的足码，使 λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2; λ_3, μ_3, ν_3 作为一个右手直角

坐标系的三个坐标轴的方向余弦.

2．当 $k_1=k_2\neq k_3$ 时，λ_3, μ_3, ν_3 是唯一确定的，再由 k 取任意两个互相垂直的主方向，它们的方向余弦是 λ_1, μ_1, ν_1 和 λ_2, μ_2, ν_2, 且与 λ_3, μ_3, ν_3 作成一个右手直角坐标系的三个坐标轴的方向余弦.

3．当 $k_1=k_2=k_3$ 时，λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2 和 λ_3, μ_3, ν_3 可以任意选取，可将它们作为右手直角坐标系的三个坐标轴的方向余弦.

【例 2】 求二次曲面 $yz+zx+xy=a^2$ 的主方向.

解：将已知方程写作 $2yz+2zx+2xy=2a^2$, 它的特征方程是

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix}=0.$$

即 $k^3-3k-2=0$, 其特征根是 -1, -1, 2.

$k_1=k_2=-1$ 所对应的主方向的方向余弦适合一个方程 $\lambda+\mu+\nu=0$. 取适合此方程的两组互相垂直的方向余弦

$$\lambda_1=\frac{-1}{\sqrt{2}},\ \mu_1=0,\ \nu_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

和
$$\lambda_2=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \mu_2=\frac{-2}{\sqrt{6}},\ \nu_2=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

又 $k_3=2$ 所对应的主方向的方向余弦适合

$$-2\lambda_3+\mu_3+\nu_3=0,\ \lambda_3-2\mu_3+\nu_3=0,$$

解之得
$$\lambda_3=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \mu_3=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \nu_3=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

且
$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}=1,$$

故这三个主方向形成右手系。

有了 λ_i, μ_i, ν_i 所确定的直角坐标系后，可以证明下面一个重要定理。

定理 4 以三个主方向所建立的直角坐标系为新坐标系而作坐标轴的旋转，则

$$\phi(x, y, z)=k_1x'^2+k_2y'^2+k_3z'^2. \tag{7}$$

【证】 由旋转公式得

$$x'=\lambda_1x+\mu_1y+\nu_1z,\ y'=\lambda_2x+\mu_2y+\nu_2z,$$
$$z'=\lambda_3x+\mu_3y+\nu_3z,$$

但

$$\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mu_1\frac{\partial\phi}{\partial y}+\nu_1\frac{\partial\phi}{\partial z}=x\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_1}+y\frac{\partial\phi}{\partial\mu_1}+z\frac{\partial\phi}{\partial\nu_1}$$
$$=2k_1(\lambda_1x+\mu_1y+\nu_1z)$$
$$=2k_1x'.$$

同理

$$\lambda_2\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mu_2\frac{\partial\phi}{\partial y}+\nu_2\frac{\partial\phi}{\partial z}=2k_2y',$$
$$\lambda_3\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mu_3\frac{\partial\phi}{\partial y}+\nu_3\frac{\partial\phi}{\partial z}=2k_3z'.$$

将此三式分别用 x', y', z' 相乘、相加，再利用

$$x=\lambda_1x'+\lambda_2y'+\lambda_3z',\ y=\mu_1x'+\mu_2y'+\mu_3z',$$
$$z=\nu_1x'+\nu_2y'+\nu_3z',$$

即得

$$x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y}+z\frac{\partial\phi}{\partial z}=2(k_1x'^2+k_2y'^2+k_3z'^2)$$

或

$$\phi(x, y, z)=k_1x'^2+k_2y'^2+k_3z'^2.$$ 】

【例 3】 将例 1 中二次曲面方程的二次项化为仅含平方项。

解：由例 1 知：

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = 1,$$

故这三个主方向可形成右手直角坐标系的三个单位向量，此时旋转公式是

$$x = \frac{x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{-2x'}{\sqrt{6}} - \frac{z'}{\sqrt{3}},$$

$$z = \frac{x'}{\sqrt{6}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&2y^2 - 2yz + 2zx - 2xy \\
&= 2\Big[\left(\frac{-2x'}{\sqrt{6}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{2x'}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{6}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}\right) \\
&\quad + \left(\frac{x'}{\sqrt{6}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}\right) \\
&\quad + \left(\frac{x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2x'}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{3}}\right)\Big] \\
&= 2\Big[\left(\frac{2x'}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\frac{2x'}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{6}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}\right) \\
&\quad + \left(\frac{x'}{\sqrt{6}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{y'^2}{2}\Big] \\
&= 2\left(\frac{3x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}\right) = 3x'^2 - y'^2.
\end{aligned}$$

【例 4】 将例 2 中二次曲面方程的二次项变为仅含平方项，且求新系下的方程。

解：此时旋转公式是

$$x=\frac{-x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{-2y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}},$$

$$z=\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}},$$

代入 $yz+zx+xy=a^2$ 中，得

$$\left(\frac{-2y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}\right)$$
$$+\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{-x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}\right)$$
$$+\left(\frac{-x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{-2y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}\right)=a^2.$$

化简得：$$-(x'^2+y'^2)+2z'^2=2a^2.$$

这表示旋转双叶双曲面，且旋转轴是新 z' 轴，即 $x=y=z$。

*【例 5】 求 $\phi(x,y,z)\equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ 表示一对平面的充要条件（参看思考题三第 3 题）。

解：由定理 3，经过转轴后，$\phi(x,y,z)=0$ 化为

$$k_1x'^2+k_2y'^2+k_3z'^2=0.$$

1．$\phi(x,y,z)=0$ 表示一对重合平面的充要条件是 k_1，k_2，k_3 三数中有两个是零，而第三个不是零．由(4)得知：$I_3=k_1k_2k_3=0$，$A+B+C=k_2k_3+k_3k_1+k_1k_2=0$．所求的充要条件是 $I_3=0$，$A+B+C=0$．

2．$\phi(x,y,z)=0$ 表示一对不重合平面的充要条件是：k_1，k_2，k_3 三数中有两个不是零，而第三个是零．由公式(4)得知：$I_3=k_1k_2k_3=0$，$A+B+C=k_2k_3+k_3k_1+k_1k_2\neq 0$．

(1) $\phi(x,y,z)=0$ 表示一对实的平面的充要条件是：k_1，k_2，k_3 三数中有两个反号，第三个是零．所求的充要条件是 $I_3=0$，$A+B+C<0$．

(2) $\phi(x,y,z)=0$ 表示一对虚的平面的充要条件是 k_1，k_2，k_3 三数中有两个同号，第三个是零．所求的充要条件是 $I_3=0$，$A+B+C>0$．

习 题 8·4

1. 求下列曲面的主平面

 (1) $14x^2+14y^2+8z^2-4yz-4zx-8xy+18x-18y+5=0$;

 (2) $2x^2+20y^2+18z^2-12yz+12xy+22x+6y-2z-2=0$;

 (3) $x^2+y^2+z^2-2yz+2zx-2xy-2x-4y-2z+3=0$.

2. 求下列曲面的主平面和主方向，并用旋转使二次项化为仅含平方项：

 (1) $x^2+3y^2+3z^2-2yz-2x-2y+6z+3=0$;

 (2) $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=0$.

3. 求证 $2x^2-y^2-22z^2+20yz+10zx-4xy+2x-20y+14z+14=0$ 表示一旋转锥面，并求其顶点坐标、半顶角和轴的方向.

4. 当 $k_1=k_2=k_3\neq0$ 时，$F(x, y, z)=0$ 表示什么曲面？

*5. 如果特征根 k^* 是单根，则所对应的主方向的方向余弦 λ^*, μ^*, ν^* 将适合

$$\lambda^*(F+fk^*)=\mu^*(G+gk^*)=\nu^*(H+hk^*).$$

这里 F, G, H 是 I_3 中 f, g, h 的代数余子式.

第五节 二次曲面普遍方程的化简

我们知道，在研究普遍二次曲线方程

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

的化简问题时，首先要化去交叉项 $2hxy$. 同理，关于研究普遍二次曲面方程 $F(x, y, z)=0$ 的化简问题时，也要先化去三个交叉项. 由第四节定理 3 可知经过适当地旋转坐标轴即可得到.

设 $F(x, y, z)=0$ 化成

$$a'x'^2+b'y'^2+c'z'^2+2u'x'+2v'y'+2w'z'+d=0. \qquad (1)$$

我们分下列几种情况加以讨论：

1. $a'\neq0,\ b'\neq0,\ c'\neq0$

将(1)配方，得

$$a'\left(x'+\frac{u'}{a'}\right)^2+b'\left(y'+\frac{v'}{b'}\right)^2+c'\left(z'+\frac{w'}{c'}\right)^2$$
$$+d-\frac{u'^2}{a'}-\frac{v'^2}{b'}-\frac{w'^2}{c'}=0.$$

平移坐标轴，得

$$a'x''^2+b'y''^2+c'z''^2+u_0=0, \tag{2}$$

这里

$$u_0=d-\frac{u'^2}{a'}-\frac{v'^2}{b'}-\frac{w'^2}{c'}. \tag{3}$$

(1) $u_0\neq0$

(i) $a'u_0<0,\ b'u_0<0,\ c'u_0<0$　椭圆面；

(ii) $a'u_0>0,\ b'u_0>0,\ c'u_0>0$　虚椭圆面；

(iii) $a'u_0<0,\ b'u_0<0,\ c'u_0>0$　单叶双曲面；

(iv) $a'u_0<0,\ b'u_0>0,\ c'u_0>0$　双叶双曲面。

(2) $u_0=0$

(i) $a',\ b',\ c'$ 不同号　实锥面；

(ii) $a',\ b',\ c'$ 同号　虚锥面。

2. $a'\neq0,\ b'\neq0,\ c'=0$

(1) $w'\neq0$ 将(1)式配方，得

$$a'\left(x'+\frac{u'}{a'}\right)^2+b'\left(y'+\frac{v'}{b'}\right)^2$$
$$+2w'\left(z'+\frac{d}{2w'}-\frac{u'^2}{2a'w'}-\frac{v'^2}{2b'w'}\right)=0$$

平移坐标轴得

$$a'x''^2+b'y''^2+2w'z''=0. \tag{4}$$

(i) $a'b'>0$　椭圆抛物面；

(ii) $a'b'<0$　双曲抛物面。

(2) $w'=0$ 将(1)配方，得

$$a'\left(x'+\frac{u'}{a'}\right)^2+b'\left(y'+\frac{v'}{b'}\right)^2+d-\frac{u'^2}{a'}-\frac{v'^2}{b'}=0$$

平移坐标轴得

$$a'x''^2+b'y''^2+v_0=0, \tag{5}$$

这里 $v_0=d-\dfrac{u'^2}{a'}-\dfrac{v'^2}{b'}$.

(i) $v_0\neq 0$

$a'v_0<0,\ b'v_0<0$ 椭圆柱面；

$a'v_0>0,\ b'v_0>0$ 虚椭圆柱面；

$a'v_0>0,\ b'v_0<0$ 双曲柱面。

(ii) $v_0=0$

$a'b'<0$ 一对实相交平面；

$a'b'>0$ 一对虚相交平面。

3. $a'\neq 0,\ b'=0,\ c'=0$

(1) $v'\neq 0$ 将(1)配方，得

$$a'\left(x'+\frac{u'}{a'}\right)^2+2v'\left(y'+\frac{d}{2v'}-\frac{u'^2}{2a'v'}\right)+2w'z'=0$$

平移坐标轴得

$$a'x''^2+2v'y''+2w'z''=0. \tag{6}$$

再于 $y''z''$ 面上作坐标轴的旋转，使 $v'y''+w'z''=0$ 为新 z''' 轴，于是(6)化成

$$a'x'''^2+2v''y'''=0, \tag{7}$$

这里 $v''\neq 0$，它表示抛物柱面。

(2) $w'\neq 0$ 同上。

(3) $v'=w'=0$ 此时(1)化成

$$a'x'^2+2u'x'+d=0$$

(i) $u'^2-a'd>0$ 一对实平行平面；

(ii) $u'^2-a'd=0$ 一对重合平面；

(iii) $u'^2-a'd<0$ 一对虚平行平面.

【例 1】 将上节例 1 的曲面化成标准方程.

解：用上节例 3 的旋转公式

$$2x+y-3z-5=2\left(\frac{x'}{\sqrt{6}}-\frac{y'}{\sqrt{2}}-\frac{z'}{\sqrt{3}}\right)$$
$$+\left(\frac{-2x'}{\sqrt{6}}-\frac{z'}{\sqrt{3}}\right)-3\left(\frac{x'}{\sqrt{6}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}-\frac{z'}{\sqrt{3}}\right)-5$$
$$=-\frac{3}{\sqrt{6}}x'-\frac{5}{\sqrt{2}}y'-5,$$

于是经过旋转坐标轴后，曲面的方程是

$$3x'^2-y'^2-\frac{3}{\sqrt{6}}x'-\frac{5}{\sqrt{2}}y'-5=0,$$

即
$$3\left(x'-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2-\left(y'+\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2=2.$$

将原点平移到$\left(\frac{1}{2\sqrt{6}},\ -\frac{5}{2\sqrt{2}},\ 0\right)$，即得标准方程

$$3x''^2-y''^2=2.$$

这表示双曲柱面.

注意 关于中心型曲面可以中心为新原点，先作平移，化去一次项，再作旋转，消去三个交叉项.

【例 2】 化 $7x^2-8y^2-8z^2-2yz-8zx+8xy-16x+14y-14z-5=0$ 成标准方程.

解：中心是 $(0,\ 1,\ -1)$，作平移 $x=x'$，$y=y'+1$，$z=z'-1$，得 $7x'^2-8y'^2-8z'^2-2y'z'-8z'x'+8x'y'+9=0$. 特征方程是 $k^3+9k^2-81k-729=0$，特征根是 $k_1=-9$，$k_2=-9$，$k_3=9$. k_3 所对应的主方向的方向余弦是 $\frac{4}{\sqrt{18}}$，$\frac{1}{\sqrt{18}}$，$\frac{-1}{\sqrt{18}}$，

此可作为新 z'' 轴的方向余弦．新 x'' 轴，新 y'' 轴的方向余弦分别取作$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$和$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$．作转轴

$$x' = \frac{y''}{3} + \frac{4z''}{\sqrt{18}},\ y' = \frac{x''}{\sqrt{2}} - \frac{2y''}{3} + \frac{z''}{\sqrt{18}},$$

$$z' = \frac{x''}{\sqrt{2}} + \frac{2y''}{3} - \frac{z''}{\sqrt{18}},$$

得 $x''^2 + y''^2 - z''^2 = 1$，这表示旋转单叶双曲面。

习 题 8·5

1．化下列二次曲面的普遍方程为标准方程：

(1) $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 2x - 2y + 6z + 3 = 0$;

(2) $4y^2 + 4z^2 + 4yz - 2x - 14y - 22z + 33 = 0$;

(3) $2y^2 - 2yz + 2zx - 2xy - x - 2y + 3z - 2 = 0$.

2．求证 $5x^2 - 4y^2 + 5z^2 + 4yz - 14zx + 4xy + 16x + 16y - 32z + 8 = 0$ 表示一对相交平面，且交线方程是 $y = x + 3$, $y = z + 1$，交角是 $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

3．求证 $9x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8yz + 12zx + 12xy + 4x + y + 10z + 1 = 0$ 表示一抛物柱面，且与母线垂直的平截线是焦参数为 $\frac{7}{34}$ 的抛物线.

第六节　普遍二次曲面的不变量完全系统

6·1　普遍二次曲面的不变量

在平面解析几何里，普遍二次曲线

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \tag{A}$$

经过坐标轴的平移

$$x = x' + x_0,\ y = y' + y_0,$$

得到

$$a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2 + 2g'x' + 2f'y' + c' = 0, \tag{B}$$

于是

$$a'=a,\ \ b'=b. \tag{C}$$

将(C)中两式相加，得

$$a'+b'=a+b. \tag{D}$$

这里 a, b 和 a', b' 分别表示平移前后平方项的系数.

又(A)经过坐标轴的旋转

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\ \ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,$$

得到

$$a'x'^2+2h'x'y'+b'y'^2+2g'x'+2f'y'+c'=0. \tag{E}$$

这里

$$\begin{cases} a'=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta, \\ b'=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta. \end{cases} \tag{F}$$

将(F)中两式相加，得

$$a'+b'=a+b. \tag{G}$$

这里 a, b 和 a', b' 分别表示旋转前后平方项的系数.

由(D)与(G)可以看出：普遍二次曲线(A)经过坐标变换，前后相应系数间的某些关系是不改变的. 对于这些不变的关系，有以下的定义：

定义 普遍二次曲线(A)经过坐标轴的平移及旋转得到(B)或(E). 如果由对应系数确定的一个函数的值不改变，也即

$$\phi(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h)=\phi(a',\ b',\ c',\ f',\ g',\ h').$$

则这个函数叫做普遍二次曲线(A)关于坐标变换的不变量.

可以证明下列诸函数

$$I_1=a+b,\ \ I_2=\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix},\ \ I_3=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

是坐标变换下的不变量，叫做(A)的基本不变量．还可以证明当 $I_2=I_3=0$ 时，

$$K_1=\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & g \\ g & a \end{vmatrix}$$

是移轴下的不变量，叫做(A)的半不变量或条件不变量．利用 I_1、I_2、I_3 和 K_1 可以完全刻划出 (A) 所表示的曲线的形状以及几何性质．我们说 I_1、I_2、I_3 和 K_1 构成普遍二次曲线(A)的不变量完全系统．不变量完全系统这个思想，不但对研究平面上的普遍二次曲线和空间的普遍二次曲面起很大作用，而且在近代数学的其它分支里，也常常利用它来解决结构问题．因此，这种思想在近代数学里也是很重要的．

在空间解析几何里也有类似的定义．

定义 普遍二次曲面

$$\begin{aligned}F(x,\ y,\ z)\equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy\\+2ux+2vy+2wz+d=0\end{aligned} \tag{1}$$

经过任意坐标变换(移轴或转轴或转轴兼移轴)，得到

$$\begin{aligned}F'(x',\ y',\ z')\equiv a'x'^2+b'y'^2+c'z'^2+2f'y'z'+2g'z'x'\\+2h'x'y'+2u'x'+2v'y'+2w'z'+d'\\=0.\end{aligned} \tag{2}$$

如果(1)与(2)的由对应系数确定的一个函数的值不变，也即

$$\begin{aligned}&\phi(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\ u,\ v,\ w,\ d)\\&\quad=\phi(a',\ b',\ c',\ f',\ g',\ h',\ u',\ v',\ w',\ d'),\end{aligned}$$

则这个函数叫做普遍二次曲面(1)的不变量．

关于 (1) 的不变量有下列诸定理．由于这些定理的证明需要较繁琐的计算，而且对以后不变量的运用无关，故在此对定理只作介绍，不予证明．

定理1

$$I_1=a+b+c,\ I_2=\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & g \\ g & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$$

和
$$I_3=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

是移轴和转轴下的不变量.

定理2

$$I_4=K_3=\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix}$$

是移轴和转轴下的不变量.

定理3

$$K_1=\begin{vmatrix} a & u \\ u & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & v \\ v & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & w \\ w & d \end{vmatrix}$$

和
$$K_2=\begin{vmatrix} b & f & v \\ f & c & w \\ v & w & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & g & w \\ g & a & u \\ w & u & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & h & u \\ h & b & v \\ u & v & d \end{vmatrix}$$

是转轴下的不变量，且当矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \end{bmatrix}$$

的秩是1时，K_1 是移轴下的不变量；秩是2时，K_2 是移轴下的不变量.

定义 I_1、I_2、I_3 和 I_4 称为普遍二次曲面 $F(x, y, z)=0$ 的基本不变量，K_1 和 K_2 称为条件不变量或半不变量.

6·2 普遍二次曲面的不变量完全系统

利用基本不变量和条件不变量，可以完全确定二次曲面的形状．有下面的定理：

定理4 普遍二次曲面 $F(x, y, z)=0$ 所表示的轨迹可用 I_1、I_2、I_3、$I_4=K_3$ 及 K_1、K_2 判别如下表：

型的检验	判别标志		曲面名称
中心型 $I_3\neq0$	$I_2>0$, $I_1\cdot I_3>0$	$K_3<0$	[1] 椭圆面
		$K_3>0$	[2] 无实轨迹(虚椭圆面)
		$K_3=0$	[3] 点(虚锥面)
	$I_2\leqslant0$ 或 $I_1\cdot I_3\leqslant0$	$K_3>0$	[4] 单叶双曲面
		$K_3<0$	[5] 双叶双曲面
		$K_3=0$	[6] 二次锥面
第一类无心型 $I_3=0$, $K_3\neq0$	$I_2>0$ (或 $K_3<0$)		[7] 椭圆抛物面
	$I_2<0$ (或 $K_3>0$)		[8] 双曲抛物面
第一类多心型 $I_3=0$, $K_3=0$, $I_2\neq0$	$I_2>0$	$I_1\cdot K_2<0$	[9] 椭圆柱面
		$I_1\cdot K_2>0$	[10] 无实轨迹(虚椭圆柱面)
		$K_2=0$	[11] 直线(一对相交虚平面)
	$I_2<0$	$K_2\neq0$	[12] 双曲柱面
		$K_2=0$	[13] 一对相交平面
第二类无心型 $I_3=0$, $K_3=0$, $I_2=0$, $K_2\neq0$			[14] 抛物柱面
第二类多心型 $I_3=0$, $K_3=0$, $I_2=0$, $K_2=0$		$K_1<0$	[15] 一对平行平面
		$K_1>0$	[16] 无实轨迹(一对平行虚平面)
		$K_1=0$	[17] 一对重合平面

【证】 由表中的判别标志推出本章第五节中的 $F(x, y, z)=0$ 经过转轴后，所得的(1)式中的系数间的关系.

先证明 [1]：由

$$I_2=I'_2=\begin{vmatrix} b' & 0 \\ 0 & c' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c' & 0 \\ 0 & a' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{vmatrix}$$

$$=b'c'+c'a'+a'b'>0;$$

$$I_3=I'_3=\begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{vmatrix}=a'b'c'\neq 0;$$

$$K_3=I_4=I'_4=\begin{vmatrix} a' & 0 & 0 & u' \\ 0 & b' & 0 & v' \\ 0 & 0 & c' & w' \\ u' & v' & w' & d \end{vmatrix}$$

$$=a'b'c'd-b'c'u'^2-c'a'v'^2-a'b'w'^2$$

$$=a'b'c'\left(d-\frac{u'^2}{a'}-\frac{v'^2}{b'}-\frac{w'^2}{c'}\right)=a'b'c'u_0<0;$$

$$I_1\cdot I_3=I'_1\cdot I'_3=(a'+b'+c')a'b'c'>0.$$

根据 $I_2>0$ 和 $I_1\cdot I_3>0$ 可知 a', b', c' 必须同号.

1. $a'>0$, $b'>0$, $c'>0$:

由 $K_3<0$ 可知 $u_0<0$, 故有 $a'u_0<0$, $b'u_0<0$, $c'u_0<0$;

2. $a'<0$, $b'<0$, $c'<0$:

由 $K_3<0$ 可知 $u_0>0$, 故有 $a'u_0<0$, $b'u_0<0$, $c'u_0<0$.

由本章第五节(1)(i)可知：$F(x, y, z)=0$ 表示椭圆面.

再证明[14]：

由

$$I_2=I'_2=b'c'+c'a'+a'b'=0;\quad I_3=I'_3=a'b'c'=0;$$

$$K_3=I_4=I'_4=a'b'c'd-b'c'u'^2-c'a'v'^2-a'b'w'^2,$$

$$K_2=K_2'=\begin{vmatrix} b' & 0 & v' \\ 0 & c' & w' \\ v' & w' & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c' & 0 & w' \\ 0 & a' & u' \\ w' & u' & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a' & 0 & u' \\ 0 & b' & v' \\ u' & v' & d \end{vmatrix}$$

$$=(b'c'+c'a'+a'b')d-(b'+c')u'^2$$

$$-(c'+a')v'^2-(a'+b')w'^2\neq 0.$$

1. $a'=0$, $b'=0$, $c'=0$, 则 $K_2=0$, 这不可能.

2. $a'=0$, $b'\neq 0$, $c'\neq 0$; $a'\neq 0$, $b'=0$, $c'\neq 0$; $a'\neq 0$, $b'\neq 0$, $c'=0$, 则 $I_2\neq 0$, 这不可能.

3. $a'\neq 0$, $b'=0$, $c'=0$, 此时 $K_2=-a'(v'^2+w'^2)\neq 0$. 故知 $v'^2+w'^2\neq 0$, 从而知 v', w' 两数中至少有一个非零, 由本章第五节 3(1) 可知 $F(x, y, z)=0$ 表示抛物柱面.

4. $a'=0$, $b'\neq 0$, $c'=0$; $a'=0$, $b'=0$, $c'\neq 0$ 讨论同 3.

其余 15 种情况留作练习,读者试自行补证. ▌

由于这六个不变量可以完全确定普遍二次曲面的形状(但不能确定位置), 因此说这六个不变量组成普遍二次曲面的不变量完全系统.

【例 1】 用不变量判定本章第五节例 2 中二次曲面的类型.

解: 在此 $I_1=-9$, $I_2=-81$, $I_3=729$, $K_3=I_4=27\times 81$. 由[4]知表示单叶双曲面.

【例 2】 就 λ 的值讨论二次曲面

$\lambda x^2+4y^2+9z^2+12yz+6zx+4xy+2x-2y+2z+8=0$

的形状.

解: 在此

$$I_1=\lambda+4+9=\lambda+13,$$

$$I_2=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=13(\lambda-1).$$

$$I_3=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{vmatrix}=0,$$

$$K_3=I_4=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 6 & -1\\ 3 & 6 & 9 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 8\end{vmatrix}=-25(\lambda-1),$$

$$K_2=\begin{vmatrix}4 & 6 & -1\\ 6 & 9 & 1\\ -1 & 1 & 8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}9 & 3 & 1\\ 3 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & -1 & 8\end{vmatrix}$$

$=2(51\lambda-70)$.

设 $I_4=0$, 则 $\lambda=1$.

1．当 $\lambda>1$ 时, $I_4\neq0$, $I_3=0$, $I_2>0$ 表示椭圆抛物面;

2．当 $\lambda<1$ 时, $I_4\neq0$, $I_3=0$, $I_2<0$ 表示双曲抛物面;

3．当 $\lambda=1$ 时, $I_4=0$, $I_3=0$, $I_2=0$, $K_2\neq0$ 表示抛物柱面.

*【例 3】 就 λ 的值讨论二次曲面

$$x^2+(2\lambda^2+1)(y^2+z^2)-2(yz+zx+xy)=2\lambda^2-3\lambda+1$$

的形状.

解: 在此

$I_1=4\lambda^2+3>0$, $I_2=4\lambda^2(\lambda^2+2)>0$, $I_3=4(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)$,

$$I_4=K_3=-4(2\lambda^2-3\lambda+1)(\lambda^4-1)$$
$$=-8(\lambda+1)(\lambda-1)^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(\lambda^2+1),$$

$$K_2=-4\lambda^2(\lambda^2+2)(2\lambda^2-3\lambda+1)=-8\lambda^2(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(\lambda^2+2),$$

设 $K_3<0$, 则 $\lambda>\frac{1}{2}$, $\lambda<-1$; $K_3>0$, 则 $-1<\lambda<\frac{1}{2}$; $K_3=0$, 则 $\lambda=\pm1$, $\frac{1}{2}$.

1. $I_2>0$, $I_1\cdot I_3>0$ 同时成立，则 $\lambda>1$, $\lambda<-1$. 若 $K_3<0$, 则 $\lambda<-1$, $\lambda>1$ 时，表示椭圆面.

2. $I_2>0$, $I_1\cdot I_3>0$ 不同时成立，即 $I_3<0$ 时，则 $-1<\lambda<1$. 若 $K_3>0$, 则 $-1<\lambda<\frac{1}{2}$, 此时表示单叶双曲面；若 $K_3<0$, 则 $\frac{1}{2}<\lambda<1$, 表示双叶双曲面；若 $K_3=0$, 则 $\lambda=\frac{1}{2}$, 表示二次锥面.

3. $I_3=0$, $K_3=0$, $I_2>0$, 则 $\lambda=\pm1$. 当 $\lambda=-1$ 时，$I_1\cdot K_2<0$, 表示椭圆柱面；当 $\lambda=1$ 时，$K_2=0$, 表示一对相交虚平面.

将上面结果合并起来再用数轴表示，就得到：



习 题 8·6

1. 用不变量判定下列曲面的形状：

(1) $3x^2+5y^2+3z^2+2yz+2zx+2xy-4x-8z+5=0$;

(2) $2x^2+20y^2+18z^2-12yz+12xy+22x+6y-2z-2=0$;

(3) $6y^2-18yz-6zx+2xy-9x+5y-5z+2=0$;

(4) $11y^2+14yz+8zx+14xy-6x-16y+2z-2=0$;

(5) $2x^2-7y^2+2z^2-10yz-8zx-10xy+6x+12y-6z+5=0$.

2. 就抛物面的标准方程证明 $K_3\cdot I_2<0$.

3. 就抛物柱面的标准方程证明 $K_2\cdot I_1<0$.

4. 就单叶双曲面的标准方程举例，使

(1) $I_2\leqslant0$, $I_1\cdot I_3>0$; (2) $I_2>0$, $I_1\cdot I_3\leqslant0$; (3) $I_2\leqslant0$, $I_1\cdot I_3\leqslant0$.

5. 补出定理 4 中未证明的 15 种情况.

6. 就 λ 的值讨论下列二次曲面的形状：

(1) $\lambda x^2+4y^2+9z^2+12yz+6zx+4xy+16x+16y-32z+8=0$;

*(2) $x^2+y^2+z^2+2\lambda xy-2\lambda x+2y+2z+3=0$;

*(3) $x^2+(\lambda+1)y^2+\lambda z^2-2yz+2xy+2x+2z+4=0$.

*7. 求证：(a) $I_3=I_4=0$, $I_2\neq0\Leftrightarrow A$ 的秩是 2;

(b) $I_2=I_3=I_4=0\Leftrightarrow A$ 的秩是 1.

第七节　化二次曲面的普遍方程为归范方程

利用坐标变换可以将二次曲面的普遍方程化成标准方程，从而便于研究它的几何性质．由于曲面的几何性质和坐标系的选择无关，所以它们必能够与不变量相联系．同二次曲线的普遍方程一样，不必经过坐标变换，就可以利用二次曲面的不变量完全系统，写出它的归范方程来进行研究．我们可以说不变量完全系统完全能够表示出普遍二次曲面的几何结构．

定理1　中心型二次曲面方程经过坐标变换，可以写成

$$k_1X^2+k_2Y^2+k_3Z^2+\frac{K_3}{I_3}=0. \tag{1}$$

这里 k_1, k_2 和 k_3 是特征根．

【证】　由本章第五节可知，经过坐标变换后，中心型二次曲面方程可以写成

$$a'x''^2+b'y''^2+c'z''^2+u_0=0 \quad (a'b'c'\neq 0). \tag{A}$$

利用不变量

$$I_1=I_1'=a'+b'+c',$$

$$I_2=\begin{vmatrix} b' & 0 \\ 0 & c' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c' & 0 \\ 0 & a' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{vmatrix}=b'c'+c'a'+a'b',$$

$$I_3=I_3'=\begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{vmatrix}=a'b'c',$$

$$K_3=I_4=I_4'=\begin{vmatrix} a' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_0 \end{vmatrix}=a'b'c'u_0.$$

根据三次方程根与系数的关系可知，a', b', c' 是特征方程

$$k^3-I_1k^2+I_2k-I_3=0$$

的三个根．不失普遍性，可设三个特征根为 $k_1=a'$, $k_2=b'$, $k_3=c'$, 而且 $u_0=\frac{K_3}{I_3}$. 将 x'', y'', z'' 分别写作 X, Y, Z, 则 (A) 即化成 (1) 式．▮

定理 2 两类无心型二次曲面方程经过坐标变换后，可分别化成

$$k_1X^2+k_2Y^2\pm 2\sqrt{\frac{-K_3}{I_2}}Z=0 \tag{2}$$

和

$$k_1X^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_2}{I_1}}Y=0. \tag{3}$$

【证】 由本章第五节可知，经过坐标变换后，两类无心型二次曲面方程可分别化成

$$a'x''^2+b'y''^2+2w'z''=0 \quad (a'b'\neq 0,\ w'\neq 0) \tag{B}$$

和

$$a'x'''^2+2v'y'''=0 \quad (a'\neq 0,\ v'\neq 0). \tag{C}$$

在 (B) 中利用不变量

$$I_1=I_1'=a'+b',\quad I_2=I_2'=a'b',\quad I_3=I_3'=0,$$

$$K_3=I_4=I_4'=\begin{vmatrix} a' & 0 & 0 & 0\\ 0 & b' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & w'\\ 0 & 0 & w' & 0\end{vmatrix}=-a'b'w'^2=-I_2w'^2,$$

这时特征方程是 $k^3-I_1k^2+I_2k=0$. 不失普遍性，可设特征根为 $k_1=a'$, $k_2=b'$, $k_3=0$. 于是 $w'=\pm\sqrt{\frac{-K_3}{I_2}}$ (参看习题 8·6 第 2 题) 并将 (B) 中的 x'', y'', z'' 改为 X, Y, Z. 于是 (B) 化成 (2).

在(C)中利用不变量

$I_1=I'_1=a'$, $I_2=I'_2=0$, $I_3=I'_3=0$, $K_3=I_4=I'_4=0$,

$$K_2=K'_2=\begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v' \\ 0 & v' & 0 \end{vmatrix}=-a'v'^2=-I_1v'^2,$$

这时特征方程是 $k^3-I_1k^2=0$. 不失普遍性，可设特征根为 $k_1=a'$, $k_2=k_3=0$. 于是 $v'=\pm\sqrt{-\frac{K_2}{I_1}}$ (参看习题 8·6 第 3 题)并将(C)中的 x''', y''', z''' 改为 X, Y, Z. 于是(C)化成(3). ▌

定理 3 两类多心型二次曲面方程经过坐标变换后，可分别化成

$$k_1X^2+k_2Y^2+\frac{K_2}{I_2}=0 \tag{4}$$

和

$$k_1X^2+\frac{K_1}{I_1}=0. \tag{5}$$

定理 3 的证明与定理 2 完全相同，留作练习，读者试自行补上.

定义 方程(1)～(5)叫做普遍二次曲面的归范方程.

注意 五类归范方程实际就是本章第三节中利用中心所分成的五类二次曲面的方程.

【例 1】 求二次曲面 $x^2+y^2+z^2-yz+zx-xy-2y-2z+2=0$ 的归范方程.

解：在此特征方程是 $k^3-6k^2+9k-4=0$, 特征根是 1, 1 和 4. 又 $I_3=4$, $I_4=-16$, 故由(1)得归范方程是：

$$X^2+Y^2+4Z^2-\frac{16}{4}=0 \quad 即 \quad \frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{4}+Z^2=1$$

这是椭圆面.

【例 2】 求二次曲面 $x^2+3y^2+z^2+2yz+2zx+2xy-2x+4y+2z+12=0$ 的归范方程.

解: 在此特征方程是 $k^3-5k^2+4k=0$, 特征根是 0, 1, 4. 又 $I_2=4$, $I_4=-8$, 故由(2)得归范方程

$$X^2+4Y^2\pm2\sqrt{2}\,Z=0,$$

这是椭圆抛物面.

【例 3】 求二次曲面 $x^2+7y^2+z^2+10yz+2zx+10xy+8x+4y+8z-6=0$ 的归范方程.

解: 在此特征方程是 $k^3-9k^2-36k=0$, 特征根是 12, -3, 0. 又 $I_4=K_3=0$, $K_2=144$, $I_2=-36$, 故由(4)得归范方程

$$12X^2-3Y^2-\frac{144}{36}=0 \quad 即 \quad 12X^2-3Y^2=4$$

这是双曲柱面.

【例 4】 已知二次曲面 $F(x, y, z)=0$ 表示一个抛物柱面,求与母线垂直的平面所得的平截线(抛物线)的焦参数.

解: 用归范方程 (3) 得焦参数是 $\frac{1}{|k_1|}\sqrt{-\frac{K_2}{I_1}}$. 为了用不变量表示 k_1, 此时 $k_2=k_3=0$, 则 $k_1=I_1$, 即得焦参数是 $\frac{1}{|I_1|}\sqrt{-\frac{K_2}{I_1}}$.

【例 5】 在双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$ 中,如果 $a=b$, 则称为等轴双曲抛物面. 求 $F(x, y, z)=0$ 表示等轴双曲抛物面的充要条件.

解: 由假设, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$ 表示等轴双曲抛物面的充要条件是 $I_1=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=0$. 由于 $F(x, y, z)=0$ 表示双曲

抛物面的充要条件是 $I_3=0$, $I_2<0$ (或 $K_3>0$). 因此 $F(x, y, z)=0$ 表示等轴双曲抛物面的充要条件是 $I_1=0$, $I_3=0$, $I_2<0$ (或 $K_3>0$).

*【例 6】 求二次曲面

$$a(x^2+2yz)+b(y^2+2zx)+c(z^2+2xy)=1 \quad (abc\neq 0)$$

的归范方程,并推求它表示旋转曲面的充要条件.

解: 在此

$$I_1=a+b+c,$$

$$I_2=bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2$$

$$=-\frac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2],$$

$$I_3=3abc-a^3-b^3-c^3=I_1\cdot I_2,\quad I_4=-I_3.$$

特征方程是

$$k^3-I_1k^2+I_2k-I_1\cdot I_2=0 \quad 即 \quad (k^2+I_2)(k-I_1)=0.$$

1. $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$; $a=b\neq c$; $b=c\neq a$; $c=a\neq b$

(1) $I_1\neq 0$, 此时 $I_2<0$, $I_1\cdot I_2\neq 0$, 特征根是

$$k_{1,2}=\pm\sqrt{-I_2},\ k_3=I_1.$$

归范方程是

$$k_1X^2+k_2Y^2+k_3Z^2=1. \tag{*}$$

(i) $I_1>0$: 此时 $k_3>0$, $k_1\cdot k_2<0$, 表示单叶双曲面.

(ii) $I_1<0$: 此时 $k_3<0$, $k_1\cdot k_2<0$, 表示双叶双曲面.

(2) $I_1=0$: 此时 $K_3=I_4=0$, $K_2=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=-I_2$.

归范方程是

$$k_1X^2+k_2Y^2=1,$$

但 $k_1\cdot k_2<0$, 故表示双曲柱面.

2. $a=b=c$

此时 $I_1\neq 0$, $I_2=0$, $I_3=0$, 特征根是 $k_1=I_1$, $k_2=k_3=0$, 又 $K_1=-(a+b+c)=-I_1$, 归范方程是 $I_1x^2=1$.

(1) $I_1>0$: 即 $a>0$, 表示一对实平行平面.

(2) $I_1<0$: 即 $a<0$, 表示一对虚平行平面.

另一方面从原方程也可以得到

$$(x+y+z)^2=\frac{1}{a}.$$

就 $a>0$ 或 $a<0$ 分别表示一对实的或虚的平行平面.

3. 当 $a\to\infty$ 时,已知方程化成

$$x^2+2yz=0,$$

这表示实锥面. 同理,当 $b\to\infty$ 或 $c\to\infty$ 时的情况与此相同.

最后研究已知曲面表示旋转曲面的充要条件, 根据它的规范方程只须就 1(1)的情况加以讨论即可. 由方程(*),得

$$\begin{aligned}\text{已知曲面表示旋转曲面} &\Leftrightarrow k_1=k_3 \quad \text{或} \quad k_2=k_3\\ &\Leftrightarrow I_1^2=-I_2\\ &\Leftrightarrow (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\\ &\Leftrightarrow bc+ca+ab=0\end{aligned}$$

下面研究旋转曲面的形状:

如果取 $k_1=\sqrt{-I_2}=I_1=a+b+c$, $k_2=-\sqrt{-I_2}=-(a+b+c)$, $k_3=k_1$, 于是(*)化成

$$X^2-Y^2+Z^2=\frac{1}{a+b+c}.$$

这表示旋转单叶双曲面或旋转双叶双曲面, 要根据 $I_1=a+b+c>0$ 或 $I_1<0$ 而定.

如果取 $k_1=\sqrt{-I_2}=a+b+c$, $k_2=-\sqrt{-I_2}=-(a+b+c)$, $k_3=k_2$, 于是(*)化成

$$X^2-Y^2-Z^2=\frac{1}{a+b+c},$$

这表示旋转双叶双曲面或旋转单叶双曲面,要根据 $I_1>0$ 或 $I_1<0$ 而定.

关于特征根的其它两种情况与此完全相同,这里不作讨论了.

习 题 8·7

1. 求下列普遍二次曲面的规范方程:

(1) $11y^2+14yz+8zx+14xy-6x-16y+2z-2=0$;

(2) $6y^2-18yz-6zx+2xy-9x+5y-5z+2=0$;

(3) $36x^2+4y^2+z^2-4yz-12zx+24xy+4x+16y-26z-3=0$;

(4) $3x^2-24y^2+8z^2+16yz-10zx-14xy+22y+2z-4=0$;

(5) $9x^2+y^2+z^2-2yz+6zx-6xy+18x-6y+6z-7=0$.

2. 已知普遍二次曲面 $F(x, y, z)=0$ 表示椭圆柱面，求与母线垂直的平面所得平截线的面积.

3. 已知普遍二次曲面 $F(x, y, z)=0$ 表示一对相交平面，求所成的锐角.

4. 已知普遍二次曲面 $F(x, y, z)=0$ 表示一对平行平面，求其距离.

*5. 求证 $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2bcyz-2cazx-2abxy=1$ 表示一个单叶双曲面，且两个实半轴的长度平方和等于它的虚半轴的长度的平方.

*6. 讨论二次曲面

$$a(x^2+2yz)+b(y^2+2zx)+c(z^2+2xy)-2ux-2vy-2wz+1=0.$$

本章提要

1. 直线和普遍二次曲面的相关位置

(1) 割线，切线，离线； (2) 渐近线； (3) 母线.

2 平面和普遍二次曲面的相关位置

(1) 平截线是二次曲线； (2) 平行平截线是同型二次曲线； (3) 切面和法线.

3. 普遍二次曲面的几何性质

(1) 切面和法线； (2) 径平面、主平面和主轴； (3) 中心.

4. 普遍二次曲面的中心

(1) 几何性质； (2) 用于分类：

(i) 中心型二次曲面：椭圆面(实或虚)，单叶双曲面，双叶双曲面，锥面(实或虚)共六类.

(ii) 第一类无心型二次曲面：椭圆抛物面，双曲抛物面共两类.

(iii) 第二类无心型二次曲面：抛物柱面，仅一类.

(iv) 第一类多心型二次曲面：椭圆柱面(实或虚)，双曲柱面，一对相交平面(实或虚)共五类.

(v) 第二类多心型二次曲面：一对平行平面(相异、重合或虚)共三类.

5．主方向

(1) 求法　先求特征根 k_1, k_2, k_3:

(i) k_1, k_2, k_3 不同，三个主方向确定；

(ii) k_1, k_2, k_3 中有两个相同，两个主方向不确定，但第三个确定；

(iii) k_1, k_2, k_3 三个相同，三个主方向均不确定.

(2) 特性　用以确定新坐标系的方向，使 $\phi(x, y, z)$ 化成仅含平方项.

6．主平面　至少有一个，最多有三个，这是由非零特征根及对应主方向来确定的.

7．化普遍方程成十七类标准方程　由新系关于旧系的位置可以得到二次曲面的确切位置.

8．普遍二次曲面不变量完全系统　由四个基本不变量和两个条件不变量组成．利用它们可以完全确定曲面的形状，但不能确定曲面的位置.

9．化普遍方程为五类归苑方程　由不变量表示，可以研究曲面的几何性质．也就是说，普遍二次曲面不变量完全系统可以完全确定其结构.

复 习 题 八

1．求平面 $lx+my+nz-p=0$ 与椭圆面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相交的充要条件.

2．求证 $3x^2+5y^2+3z^2-2yz+2zx-2xy+2x+12y+10z+20=0$ 有唯一中心，并以此中心为新原点作移轴，求新系下的曲面方程.

3．求证习题 8·3 第 1 题 (3) 有一条直线的中心，并以此直线上任一点为新原点作移轴，求新系下的方程.

4．先证二次曲面 $2x^2+y^2-z^2+4yz-2zx-4xy+2\lambda x+2y-4z-4=0$ 有唯一的中心，且与原点最近，试确定 λ 的值.

5．设 $2x^2-y^2+7z^2+6yz+12zx+4xy-24y-8z+d=0$ 表示锥面，求 d 的值，并求顶点的坐标，再证它是旋转曲面，且求旋转轴的方程.

6. 设λ是参数，求二次曲面族

$$x^2+4y^2+6z^2+3zx+2xy+\lambda(x+2y+3z-4)=0$$

的中心的轨迹.

7. 已知二次曲面族 $x^2+y^2-z^2+2\lambda yz+2\mu zx-2ax-2by+2cz=0$（其中 λ, μ 是参数：a, b, c 是常数）分别求其在下列条件下的中心轨迹：(1) 当 λ, μ 任意变化时；(2) 当 λ, μ 变化使已知曲面表示锥面时.

8. 求下列二次曲面的主平面：

(1) $3x^2+5y^2+3z^2-2yz+2zx-2xy+2x+12y+10z+20=0$;

(2) $5x^2+26y^2+10z^2+4yz+14zx+6xy-8x-18y-10z+4=0$;

(3) $x^2+y^2+z^2-2yz+2zx-2xy-2x+2y-2z-3=0$.

9. 化下列二次曲面普遍方程为标准方程：

(1) $3x^2-y^2-z^2+6yz-6x+6y-2z-2=0$;

(2) $4x^2-y^2-z^2+2yz-8x-4y+8z-2=0$;

(3) $26x^2+20y^2+10z^2-4yz-16zx-36xy+52x-36y-16z+25=0$;

(4) $2x^2-7y^2+2z^2-10yz-8zx-10xy+6x+12y-6z+5=0$.

10. 用不变量判别下列二次曲面的类型，并求它们的归范形式：

(1) $x^2+5y^2+z^2+2yz+6zx+2xy-2x+6y+2z=0$;

(2) $5x^2-y^2+z^2+6zx+4xy+2x+4y+6z-8=0$;

(3) $2x^2+y^2+2z^2+2yz-2xy+4x-2y=0$;

(4) $4x^2+9y^2+z^2-6yz+4zx-12xy+4x-6y+2z-5=0$.

11. 已知椭圆面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的体积是 $\frac{4}{3}\pi abc$，如果普遍二次曲面 $F(x, y, z)=0$ 表示椭圆面，求它的体积.

12. 就λ讨论二次曲面

$$\lambda x^2-y^2+z^2-2zx+2xy+2y+1=0.$$

13. 就λ和μ讨论二次曲面

$$\lambda x^2+y^2+z^2-2yz-4zx+4xy-12x-6y+6z+\mu=0.$$

14. 确定 a，使曲面 $ax^2+2yz+3=0$ 是一个旋转曲面，且求其旋转轴.

15. 设 $\lambda\neq1$，求证

$$\lambda(x^2+y^2+z^2)+2yz+2zx+2xy+\mu=0$$

表示一个旋转曲面，它的旋转轴是 $x=y=z$. 并就 λ 和 μ 讨论曲面的形状.

16. 求证两个二次曲面

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1,$$
$$(a_1x+a_2y+a_3z)^2+(b_1x+b_2y+b_3z)^2+(c_1x+c_2y+c_3z)^2=1$$

必为同型.

17. 设 $a^3+b^3+c^3=3abc$, 求证

$$ax^2+by^2+cz^2+2ayz+2bzx+2cxy+2ux+2vy+2wz+d=0$$

表示一个抛物柱面或一个双曲抛物面.

*18. (1) 求证九个条件确定一个二次曲面; (2) 已知一个二次曲线, 求证四个条件确定过此曲线的二次曲面; (3) 已知二次曲线 $\phi=0$, $z=0$, 求证过此曲线的二次曲面族可以写为

$$\phi+z(ax+by+cz+d)=0,$$

这里 a, b, c, d 是参数.

*19. 过原点 O 的任意三条两两垂直的直线与一个二次曲面交于 P, P'; Q, Q'; R, R'. 求证

(1) $\dfrac{PP'^2}{OP^2\cdot OP'^2}+\dfrac{QQ'^2}{OQ^2\cdot OQ'^2}+\dfrac{RR'^2}{OR^2\cdot OR'^2}$

和

(2) $\dfrac{1}{OP\cdot OP'}+\dfrac{1}{OQ\cdot OQ'}+\dfrac{1}{OR\cdot OR'}$

均是常数. [提示: 利用本章第一节的(4)式.]

*20. 由二次曲面上的一定点 O 作任意三条两两垂直的直线交曲面于 P, Q, R 三点. 求证平面 PQR 与曲面 O 点处的法线交于一定点. [提示: 以定点 O 为原点.]

思 考 题 八

1. 当 $F(x, y, z)=0$ 的特征根 $k_1=k_2\neq k_3$ 时, 根据本章第四节由 k_1 所确定的主方向的三个方程化成一个. 证明这个式子表示 k_1 所对应的主方向与 k_3 所对应的主方向互相垂直.

2. 设二次曲面 $\phi(x, y, z)\equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=1$

有三个主方向，且它们的方向余弦分别是λ_i，μ_i，$\nu_i(i=1, 2, 3)$。求证

(1) $f\lambda_1\lambda_2\lambda_3+g\mu_1\mu_2\mu_3+h\nu_1\nu_2\nu_3=0$;

(2) $F\lambda_1\lambda_2\lambda_3+G\mu_1\mu_2\mu_3+H\nu_1\nu_2\nu_3=0$.

这里F、G、H是I_3中f，g，h的代数余子式。从而推证过三个坐标轴及三条主轴的锥面方程是

$$yz(gH-hG)+zx(hF-fH)+xy(fG-gF)=0.$$

3. 研究$F(x, y, z)=0$表示旋转曲面的各种情况.

4. 研究$F(x, y, z)=0$表示实的直纹曲面的充要条件。

5. 已知两个普遍二次曲面$S_1=0$和$S_2=0$.

(1) 求证它们的交点在一个四次代数曲线上;

(2) 求证过它们的交点的二次曲面族方程可以写作$\lambda_1S_1+\lambda_2S_2=0$，这里$\lambda_1$、$\lambda_2$是参数;

(3) 求证过它们的交点一般可作四个二次锥面。

附录　有关代数的一些知识

第一节　行　列　式

1·1　二阶和三阶行列式

定义
$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

定义
$$D_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$

1·2　n 阶行列式

关于高阶行列式的定义有多种，这里不作介绍．它的计算方法见下面第1·3和1·4两段．为方便起见,我们将 n 阶行列式写作

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这里 a_{ij} 是在第 i 行,第 j 列的元素,D_n 中共有 n^2 个元素.

1·3　代数余子式

如果将 D_n 中的第 i 行、第 j 列的所有元素都去掉,所余的 $(n-1)^2$ 个元素(保持原位置)所成的 $(n-1)$ 阶行列式乘以 $(-1)^{i+j}$ 叫做 D_n 中元素 a_{ij} 的代数余子式．记作 A_{ij}, 即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

关于代数余子式有下列性质:

1. $\left.\begin{array}{l} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D_n \\ a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots+a_{ni}A_{ni}=D_n \end{array}\right\}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$

2. $\left.\begin{array}{l} a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \\ a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \end{array}\right\}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n);\ (i\neq j).$

3. $D_n'=D_n^{n-1}$。这里

$$D_n'=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

1·4 高阶行列式的计算

利用代数余子式的性质1，可以将高阶行列式降到二阶或三阶来计算它的数值. 例如4阶行列式 D_4 用第三列计算,则有

$$D_4=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}+a_{43}A_{43},$$

这里 A_{13}、A_{23}、A_{33}、A_{43} 都是三阶行列式. 又如五阶行列式可先降到5个四阶行列式的代数和，再计算每一个四阶行列式. 有时先利用行列式的性质使行列式的元素中多出现一些零，再利用代数余子式降阶，则计算更为简便.

第二节 矩 阵

2·1 矩阵和方阵

将 mn 个数排列成 m 行 n 列，用双直线或圆括弧或方括弧括起来,

叫做 $m\times n$ 矩阵，记作 M，每个数叫元素．即

$$M=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad 或 \quad M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

或

$$M=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

当 $m=n$ 时，叫做方阵．

按照矩阵符号的外形来看，它和行列式很相似，但是，必须分清矩阵和行列式这两个概念的含义是完全不同的．行列式表示一个代数式，而矩阵仅仅是某些数排列成的表格．

2·2 方阵的行列式

将一个 n 阶方阵的元素（位置不变）做成一个行列式叫做这个方阵的行列式．

2·3 矩阵的子行列式

在矩阵 M 中，任意选出 k 个行和 k 个列（这里 $k\leqslant m$，n 两数中较小者），则位于这 k 行和 k 列的交点上的元素所构成的 k 阶行列式叫做矩阵 M 的 k 阶子行列式．

例如在矩阵

$$M=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

中取 $k=3$，则可作成四个三阶子行列式

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\a_2 & b_2 & d_2\\a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix},\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

2·4 矩阵的秩

在一个矩阵中如果所有 $r+1$ 阶子行列式都是零，且至少有一个 r 阶子行列式不是零，则说矩阵的秩是 r. 如果矩阵的元素都是零，则称矩阵的秩是零.

例如在矩阵

$$M=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

中，它的三阶子行列式

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\1 & 3 & 4\\2 & 4 & 5\end{vmatrix},$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\1 & 2 & 4\\2 & 3 & 5\end{vmatrix},\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\end{vmatrix}$$

都是零，但二阶子行列式 $\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}\neq 0$, 故 M 的秩是 2.

第三节 线性方程组

3·1 n 元 n 个线性方程组

在方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

中，如果系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则有唯一解.

解法公式[克莱姆(Cramer)公式]为:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta},\quad \cdots$$

$$x_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

式中 Δ 为系数行列式.

3·2 线性方程组有解的判定定理

定理 1 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

的系数矩阵和增广矩阵分别是

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad 和 \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

则方程组有解的充要条件是 C 与 A 的秩相等. 如果它们的秩是 r, 则解含有 $n-r$ 个参数.

定理 2 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,n-1}x_{n-1}+a_{1n}=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,n-1}x_{n-1}+a_{2n}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,n-1}x_{n-1}+a_{nn}=0 \end{cases}$$

有解的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

3·3 齐次线性方程组

定理 3 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有唯一零解的充要条件是系数行列式不等于零.（有非零解的充要条件是系数行列式等于零.）

定理 4 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解的充要条件是: 它的系数矩阵的秩小于 n.

定理 5 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-11}x_1+a_{n-12}x_2+\cdots+a_{n-1n}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵的秩是 $n-1$, 则它的解是

$$\frac{x_1}{M_1}=\frac{x_2}{-M_2}=\cdots=\frac{x_n}{(-1)^{n-1}M_n}.$$

这里 M_i 表示在系数矩阵中划去第 i 列($i=1,2\ \cdots,n$)后所得到的 $n-1$

阶子行列式.

特例
$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0\end{cases}$$

且$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}$的秩是2时,则有

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}}=\frac{x_2}{\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}}=\frac{x_3}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}.$$

第四节 特 征 方 程

定义 以k为未知数的方程

$$\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k\end{vmatrix}=0 \qquad (*)$$

叫特征方程,它的根叫特征根.

定理1 如果$a_{ij}=a_{ji}$,则特征根都是实根,且不能都是零.

定理2 特征根是重根的判定定理 设k^*是(*)的一个特征根,且方阵

$$\begin{bmatrix}a_{11}-k^* & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-k^* & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k^*\end{bmatrix}, \quad a_{ij}=a_{ji}$$

的秩分别是0, 1, …, $n-1$时,则k^*将分别是n重根,$n-1$重根,…,二重根,单根. 反过来也成立.

习 题 答 案

第 一 章

习题1·1 **1**．均是右手系． **3**．(1) 在 yz 面：$(0, 2, 1)$ 和 $(0, -3, 0)$；在 zx 面：$(-3, 0, 1)$ 和 $(2, 0, 0)$；在 xy 面：$(-3, 2, 0)$ 和 $(2, -3, 0)$；(2) 在 x 轴：$(-3, 0, 0)$ 和 $(2, 0, 0)$；在 y 轴：$(0, 2, 0)$ 和 $(0, -3, 0)$；在 z 轴：$(0, 0, 1)$ 和 $(0, 0, 0)$． **4**．(1) 关于三个坐标面：$(3, 2, -1)$，$(-3, -2, -1)$，$(-3, 2, 1)$；(2) 关于三条坐标轴：$(-3, -2, 1)$，$(3, 2, 1)$，$(3, -2, -1)$；(3) 关于原点：$(3, -2, 1)$． **5**．(1) 第 II 卦限；(2) 第 VI 卦限． **6**．(1) 在第 I, II, VII, VIII 卦限；(2) 第 III, IV, V, VI 卦限；(3) 第 I, IV, VI, VII 卦限；(4) 第 II, III, V, VIII 卦限；(5) 第 I, III, V, VII 卦限；(6) 第 II, IV, VI, VIII 卦限． **7**．(1) $(0, 4, 0)$；(2) $(0, 4, 3)$；(3) $(5, 0, 0)$；(4) $(0, 0, 3)$；(5) $(5, 4, 0)$；(6) $(5, 4, 3)$；(7) $\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$；(8) $\left(\frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$；(9) $\left(\frac{5}{2}, 2, 0\right)$；(10) $\left(\frac{5}{2}, 2, 3\right)$． **8**．$P_1\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}, 0, 0\right)$，$P_2\left(0, \frac{\sqrt{2}a}{2}, 0\right)$，$P_3\left(-\frac{\sqrt{2}a}{2}, 0, 0\right)$，$P_4\left(0, -\frac{\sqrt{2}a}{2}, 0\right)$，$S(0, 0, \pm h)$．
12．用例 5 所建立的坐标系，得轨迹方程是 $x=\pm ky$，k 是比例常数．
13．用例 7 所建立的坐标系，得轨迹方程是 $x^2+y^2=k^2z^2$，k 是比例常数． **14**．(1) 立标相同；(2) 横标和立标分别相同．
15．(1) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$；(2) $|y_2-y_1|$．

习题1·2 **4**．$\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$． **5**．(1) A 为直角的直角三角形；(2) A 为钝角的钝角三角形；(3)锐角三角形． **9**．用第一章第一节例 2 所建立的坐标系，(1) 平方和是常数 k^2 的轨迹方程是 $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(k^2-2a^2)$；(2) 平方差是常数 k^2 的轨迹方程是 $4ax=\pm k^2$．

习题1·3 **2**. (1) $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}$; (2) $\frac{-2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7}$; (3) $\frac{1}{\sqrt{171}}, \frac{-7}{\sqrt{171}}, \frac{11}{\sqrt{171}}$. **3**. $\frac{3}{\varepsilon\sqrt{35}}, \frac{5}{\varepsilon\sqrt{35}}, \frac{1}{\varepsilon\sqrt{35}} (\varepsilon=\pm1)$. **4**. 45° 或 135°. **5**. (1), (4). **6**. (2), (4). **7**. $P(3, 3\sqrt{2}, 3)$, $\gamma=60°$. **8**. $+x$ 轴: 1, 0, 0; $-x$ 轴: -1, 0, 0; 余略. **9**. (1) $\cos\beta=+1$ 时, 与 $+y$ 轴平行; $\cos\beta=-1$ 时, 与 $-y$ 轴平行; (2) 位于 zx 面内. **10**. 前半空间: $\cos\alpha>0$, 后半空间: $\cos\alpha<0$; 余略. **11**. 第I卦限内: $\cos\alpha>0$, $\cos\beta>0$, $\cos\gamma>0$; 余略.

习题1·4 **1**. 75°30′ 或 104°30′. **3**. 1, -1, 2. **4**. 内角为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. **9**. $\arccos\frac{1}{3}$.

习题1·5 **1**. $\left(3\frac{1}{2}, 0, 2\frac{1}{2}\right)$, $\left(3\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$ 和 $\left(3\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3}\right)$. **2**. 3 : -2. **3**. (3, 2, -2). **4**. (1) 1; (2) -2.

复 习 题 一

1. (1) I, II, VII, VIII; (2) II, III, V, VIII; (3) I, III, VI, VIII; (4) II, IV, V, VII. **5**. 重心坐标 $\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right)$, 中线长 $=\frac{1}{2}\sqrt{6(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}$. **9**. (1) 右半空间不含 zx 面; (2) 左半空间含 zx 面; (3) $+x$ 轴不含原点; (4) $-x$ 轴含原点; (5) 三个坐标面和三个平面 $x=1$, $y=1$, $z=1$ 所围的立方体的内部, 但不含这六个平面; (6) 三个坐标面和三个平面 $x=1$, $y=1$, $z=1$ 所围的立方体的内部, 且含这六个平面. **10**. $x-y+z=a$. **11**. 用第一章第二节例2所建立的坐标系得轨迹方程 $(1-k^2)(x^2+y^2+z^2)-2ax(1+k^2)+a^2(1-k^2)=0$, 这里 $|PA|:|PA'|=k$ (k 是常数). **12**. $3(x^2+y^2+z^2)-2x\sum_{r=1}^{3}x_r-2y\sum_{r=1}^{3}y_r-2z\sum_{r=1}^{3}z_r+\sum_{r=1}^{3}(x_r^2+y_r^2+z_r^2)-k^2=0$. **13**. 以三相邻面为坐标面而建立坐标系, k 是常数, 得轨迹方程 $x^2+y^2+z^2=k^2$. **14**. 定点 (0, 0, c); 定面为 xy 面; 比例常数 λ, 得轨迹方程 $x^2+y^2+(1-\lambda^2)\left(z-\frac{c}{1-\lambda^2}\right)^2=\frac{c^2\lambda^2}{1-\lambda^2}$. **15**. 定点 ($a$, 0, 0); 定直

线为 z 轴; 比例常数 λ, 得轨迹方程 $(1-\lambda^2)(x-a/(1-\lambda^2))^2+(1-\lambda^2)y^2+z^2=\frac{a^2\lambda^2}{1-\lambda^2}$. **16**. $-\frac{a_1}{a_2}, -\frac{b_1}{b_2}, -\frac{c_1}{c_2}$. **17**. $(2, 3, 6)$或$\left(\frac{190}{49}, \frac{285}{49}, \frac{570}{49}\right)$. **21**. (1) $\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\,x_1+\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}+\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\,y_1+\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}+\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\,z_1+\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}+\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$; (2) $\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\,x_1-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\,y_1-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\,z_1-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$. **23**. $0, \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}, \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$; $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}, 0, \frac{\cos\gamma}{\sin\beta}$; $\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}, 0$.

第　二　章

习题2·1　**2**. (1) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OF}=\overrightarrow{DE}$, (2) $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{DE}$.　**3**. (1)平行四边形有 4 对; (2)正六边形有 6 对; (3)等边三角形不能作.　**5**. (1) $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{NL}=\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{LM}=\overrightarrow{BA}$, (2) $\overrightarrow{OL}=-\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{ON}=-\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{NL}=-\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{LM}=-\overrightarrow{AB}$.

习题2·2　**1**. 船速$=\frac{9}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$海里/时, 水速$=\frac{9}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$海里/时.　**2**. 另一力长度为 $\sqrt{2}\,|\boldsymbol{a}|$, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 成交角 $135°$, 其中 $\boldsymbol{a}$ 是已知力.　**3**. 菱形.　**8**. (1) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向; (2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向且 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$; (3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向且 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$.　**10**. 首尾相衔接成一个四边形.

习题2·3　**1**. $\boldsymbol{a}$.　**3**. (1) $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{p}, \overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, \overrightarrow{A_3A_4}=\boldsymbol{q}, \overrightarrow{A_4A_5}=-\boldsymbol{p}, \overrightarrow{A_5A_6}=-(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}), \overrightarrow{A_6A_1}=-\boldsymbol{q}$, (2)不可能.　**5**. 和是 a^2+ab+b^2, 差是 a^2-ab+b^2.　**7**. (1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 反向; (2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 同向且 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$; (3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 同向且 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$.

习题2·4　**2**. $\frac{7}{5}$.　**3**. (1) $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{q}}{2}, \overrightarrow{A_2A_3}=\frac{\boldsymbol{q}}{2}, \overrightarrow{A_3A_4}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$,

$\overrightarrow{A_4A_5}=\frac{q}{2}-p$, $\overrightarrow{A_5A_6}=-\frac{q}{2}$, $\overrightarrow{A_6A_1}=p-q$; (2) $\overrightarrow{A_1A_2}=-q$, $\overrightarrow{A_2A_3}=p+q$, $\overrightarrow{A_3A_4}=p+2q$, $\overrightarrow{A_4A_5}=q$, $\overrightarrow{A_5A_6}=-p-q$, $\overrightarrow{A_6A_1}=-p-2q$. 13. $\frac{1}{3}(A+B+C)$. 14. $\overrightarrow{BC}=\frac{A}{2}$, $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(2B-A)$, $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}(A-4B)$. 15. $\overrightarrow{AL'}=\frac{1}{b-c}(b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC})$.

习题2·5 1. a, b, c 共线; d, e 共线; d, e, f, g 共面. 2. 是. 3. 否. 4. 不共线; 共面. 5. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$. 6. $k=\pm1$. 10. 共面.

习题2·6 2. 在图2-13中 $\overrightarrow{OP}=A+B+C$, $\overrightarrow{AL}=B+C-A$, $\overrightarrow{BM}=C+A-B$, $\overrightarrow{CN}=A+B-C$. 4. (1) $\overrightarrow{BC}=C-B$, $\overrightarrow{CA}=A-C$, $\overrightarrow{AB}=B-A$; (2) $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}(B+C-2A)$, $\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}(C+A-2B)$, $\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}(A+B-2C)$; (3) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(A+B+C)$; (4) $\overrightarrow{PA'}=\frac{1}{2}(B+C-A)$, $\overrightarrow{QB'}=\frac{1}{2}(C+A-B)$, $\overrightarrow{RC'}=\frac{1}{2}(A+B-C)$. 7. $\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$, 其中 a、b、c 表示三条边. 8. $\frac{bB+cC-aA}{b+c-a}$, a 边所对傍心. 10. $\frac{1}{3}(4A-D)=\frac{1}{3}\left(4A-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$.

习题2·7 1. $a+b=\{5,\ 7,\ 9\}$, $a-b=\{-3,\ -3,\ -3\}$, $\lambda a+\mu b=\{\lambda+4\mu,\ 2\lambda+5\mu,\ 3\lambda+6\mu\}$, $\lambda a-\mu b=\{\lambda-4\mu,\ 2\lambda-5\mu,\ 3\lambda-6\mu\}$. 2. $B=\{a_1+c_1,\ a_2+c_2,\ a_3+c_3\}$. 3. 设 $a=\{a_1,\ a_2\}$, $b=\{b_1,\ b_2\}$, 则 (2) 式化成 $la_i+mb_i=0(i=1,\ 2)$; 设 $a=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $b=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$, 则 (2) 式化成 $la_i+mb_i=0(i=1,\ 2,\ 3)$; 设 $A=\{a_1,\ a_2\}$, $B=\{b_1,\ b_2\}$, $C=\{c_1,\ c_2\}$, 则 (3) 式化成 $la_i+mb_i+nc_i=0(i=1,\ 2)$; 设 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $B=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$, $C=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}$, 则 (3) 式化成 $la_i+mb_i+nc_i=0(i=1,\ 2,\ 3)$. 4. 设 $a=\{a_1,\ a_2\}$, $b=\{b_1,\ b_2\}$, 则 (6) 式化成 $la_i+mb_i+nc_i=0(i=1,\ 2)$; 设 $a=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $b=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$, 则 (6) 式化成 $la_i+mb_i+nc_i=0(i=1,\ 2,\ 3)$; 设 $A=\{a_1,\ a_2\}$, $B=\{b_1,\ b_2\}$, $C=\{c_1,\ c_2\}$, $D=\{d_1,\ d_2\}$, 则 (7) 式化成 $pa_i+qb_i+rc_i+sd_i=0(i=1,\ 2)$; 设 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $B=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$, $C=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}$, $D=\{d_1,\ d_2,\ d_3\}$, 则 (7) 式化成

$pa_i+qb_i+rc_i+sd_i=0\ (i=1,2,3)$. 7. $\overrightarrow{AB}=\left\{\frac{a_1-b_1}{2},\ \frac{a_2-b_2}{2},\ \frac{a_3-b_3}{2}\right\}$, $\overrightarrow{BC}=\left\{\frac{a_1+b_1}{2},\ \frac{a_2+b_2}{2},\ \frac{a_3+b_3}{2}\right\}$, $\overrightarrow{CD}=\left\{\frac{b_1-a_1}{2},\ \frac{b_2-a_2}{2},\ \frac{b_3-a_3}{2}\right\}$, $\overrightarrow{DA}=\left\{-\frac{a_1+b_1}{2},\ -\frac{a_2+b_2}{2},\ -\frac{a_3+b_3}{2}\right\}$. 9. (1) 共面, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, (2) 不共面. 10. $\left\{\frac{\sum\limits_{r=1}^{n}m_rx_r}{\sum\limits_{r=1}^{n}m_r},\frac{\sum\limits_{r=1}^{n}m_ry_r}{\sum\limits_{r=1}^{n}m_r},\frac{\sum\limits_{r=1}^{n}m_rz_r}{\sum\limits_{r=1}^{n}m_r}\right\}$.

习题2·8 1. (1) 一个向量长度平方的常数倍; (2) 这两个单位向量夹角的余弦. 6. (1) $\alpha=\pm\frac{3}{5}$; (2) $\beta=-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})}$. 7. $\sqrt{17+6\sqrt{3}}$.

8. $\arccos\frac{2(lua^2+mvb^2)+(mu+lv)ab}{2\sqrt{(l^2a^2+m^2b^2+lmab)(u^2a^2+v^2b^2+uvab)}}$.

11. (1) $\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$; (2) $\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$;

(3) $\frac{(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+(a_3+b_3)c_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}$; (4) $\frac{(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+(a_3+b_3)c_3}{\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2}}$.

习题2·9 1. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\frac{3}{4}$. 2. (2) 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均垂直的单位向量 $\boldsymbol{n}^\circ$, 且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}^\circ$ 成右手系; (3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 3. (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; (2) $2\boldsymbol{i}$; (3) $-3(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$; (4) $s_1t_1(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+s_1t_2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})+s_2t_1(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+s_2t_2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})$.
4. (1) $\frac{a^2}{4}(1-4a^2)$; (2) $a^3\boldsymbol{n}^\circ$, 这里 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^\circ$ 成右手系. 5. 0. 6. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 8. (1) $\pm\frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}}{\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}$;

(2) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\lambda_1&\mu_1&\nu_1\\\lambda_2&\mu_2&\nu_2\end{vmatrix}$. 9. $\sqrt{1547}$. 10. $-20.25\boldsymbol{i}-15.5\boldsymbol{j}-25.23\boldsymbol{k}$.

11. $|ps-qr|\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$. 14. 绝对值表示 $\triangle ABC$ 的面积.

习题2·10 1. (1) 1; (2) 2. 2. (1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$; (2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$. 3. ±27. 5. (1) 右手系; (2) 左手系; (3) 共面. 6. 0.

8. $\begin{vmatrix} b_1-a_1, & b_2-a_2, & b_3-a_3 \\ c_1-a_1, & c_2-a_2, & c_3-a_3 \\ d_1-a_1, & d_2-a_2, & d_3-a_3 \end{vmatrix}=0$，或者 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}=0$。

12. $\boldsymbol{b}=\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}+\dfrac{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})}$。

习题 2-12　1. $\dfrac{b_2k_1-b_1k_2}{a_1b_2-a_2b_1}$，$\dfrac{a_1k_2-a_2k_1}{a_1b_2-a_2b_1}$。　2. $\dfrac{l\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}$。

3. $\dfrac{1}{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{k})}[l(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{k})+m(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a})]$。　4. $\dfrac{1}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b})$。

复 习 题 二

1. $\overrightarrow{OC}=2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$，$\overrightarrow{OD}=2\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A}$，$\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}$。　2. $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{BB'}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB})$，$\overrightarrow{CC'}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})$。　4. $\overrightarrow{A_iA_j}=(\lambda_j-\lambda_i)\boldsymbol{e}_1+(\mu_j-\mu_i)\boldsymbol{e}_2+(\nu_j-\nu_i)\boldsymbol{e}_3$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ i\neq j)$。　6. 首尾衔接成一个封闭四边形。　7. 三角形重心，多边形平均中心。　8. (1) $\varepsilon=1$ 时，平行同向；$\varepsilon=-1$ 时，平行反向；(2) $\lambda>1$ 或 $\lambda<-1$ 时 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向；$-1<\lambda<1$ 时 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向。　9. (1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$；(2) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$，$|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}|$；(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$，$|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}|$，$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}|$。　10. L，M，N 分别是各边中点。　12. $\arccos\dfrac{2}{7}\sqrt{7}$。　14. (1) $-\dfrac{3}{2}$；(2) -7。　15. $\sqrt{p^2a^2+q^2b^2+r^2c^2}$。　17. (1) 70；(2) -126。　20. $\arccos\dfrac{4}{5}$。　22. $\dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$。

30. 取对棱两两垂直的四面体 $OABC$。设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，又设 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k$，则 $k\overrightarrow{BC}$，$k\overrightarrow{CA}$，$k\overrightarrow{AB}$ 首尾衔接成一三角形。

思 考 题 二

1. 设三顶点位置向量是 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$；又三边垂线上向量是 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$，则

$$H=A-\frac{(A-B)\cdot(C-A)}{u\cdot(C-A)}u=B-\frac{(B-C)\cdot(A-B)}{v\cdot(A-B)}v$$
$$=C-\frac{(C-A)\cdot(B-C)}{w\cdot(B-C)}w,$$
$$K=\frac{1}{2}(B+C)+\frac{(A-B)\cdot(C-A)}{2u\cdot(C-A)}u$$
$$=\frac{1}{2}(C+A)+\frac{(B-C)\cdot(A-B)}{2v\cdot(A-B)}v$$
$$=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{(C-A)\cdot(B-C)}{2w\cdot(B-C)}w.$$

第 三 章

习题3·1 **1**. (1) $i\cdot(P-\overline{i+j+k})=0$, $x-1=0$; (2) $j\cdot(P-\overline{i+j+k})=0$, $y-1=0$; (3) $k\cdot(P-\overline{i+j+k})=0$, $z-1=0$. **2**. (1) $(j+k)\cdot(P-\overline{i+j+k})=0$, $y+z-2=0$; (2) $(k+i)(P-\overline{i+j+k})=0$, $z+x-2=0$; (3) $(i+j)\cdot(P-\overline{i+j+k})=0$, $x+y-2=0$. **3**. (1) $x=1$, 与 x 轴垂直; (2) $y=1$, 与 y 轴垂直; (3) $z=1$, 与 z 轴垂直; (4) $x=0$, yz 面; (5) $y=0$, zx 面; (6) $z=0$, xy 面. **4**. (1) $y+z=1$, 与 yz 面垂直; (2) $z+x=1$, 与 zx 面垂直; (3) $x+y=1$, 与 xy 面垂直; (4) $y+z=0$, 过 x 轴; (5) $z+x=0$, 过 y 轴; (6) $x+y=0$, 过 z 轴. **5**. (1) $(i+j+k)\cdot P=1$; (2) $(i+j+k)\cdot P=0$. **6**. (1) $x=\pm1$, 与 x 轴垂直; (2) $x\pm y=0$, 过 z 轴; (3) $x+y=0$, 过 z 轴; $x+z=0$, 过 y 轴; (4) $x+2y-2z=0$ 和 $2x-3y+6z=0$, 均过原点. **7**. 过定点$\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$. **8**. 过定点$\left(0, 0, \frac{1}{n}\right)$, 其中 $n=|N|$. **9**. $(ai+bj)\cdot P+d=0$. **10**. $(ai)\cdot P+d=0$.

习题3·2 **1**. (1)与 xy 面垂直; (2)过 z 轴; (3)与 yz 面垂直; (4)在三坐标轴上的截距均是1; (5) 过原点; (6) $z-1=0$ 和 $z-2=0$ 均与 z 轴垂直. **2**. (1) 在平面表示与 x 轴垂直的直线; 在空间表示与 x 轴垂直的平面; (2) 在平面表示直线; 在空间表示与 xy 面垂直的平面. **3**. (1) 无常数项; (2) 缺对应变数; (3) 缺对应变数且无常数项; (4) 缺两个对应变数; (5) 仅含一个变数且无常数项. **4**. $x+2y+3z$

$=4$; 点$\left(1,\ 1,\ \frac{1}{3}\right)$在平面上. **5**. (1)$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{P}=x_0$, $x=x_0$; (2) $(z_0\boldsymbol{j}-y_0\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{P}=\boldsymbol{o}$, $z_0y-y_0z=0$. **6**. $(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)=0$ 和 $(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2)=0$. **7**. $D(d_1,\ d_2,\ d_3)$ 是垂足, $\boldsymbol{D}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{D})=0$, $d_1(x-d_1)+d_2(y-d_2)+d_3(z-d_3)=0$. **8**. $(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A})=0$, $b_1(x-a_1)+b_2(y-a_2)+b_3(z-a_3)=0$. **9**. $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{a})=0$, 但$\boldsymbol{a}\not\parallel(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)$. **10**. 设$\boldsymbol{a}$为已知平面法线上的一个向量, 化为 9 题. **11**. 设$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$分别为两条法线上的向量,化为例 2.

12. $\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & b_1 \\ y-y_0 & a_2 & b_2 \\ z-z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$. **13**. (2) $x=y=z$.

习题 3·3 **1**. (1)法线式为 $\frac{x-2y+5z-3}{\sqrt{30}}=0$, 在第 IV 卦限; (2) 法线式为 $\frac{4x-4y-7z}{-9}=0$, 在第 II 卦限; (3)法线式为 $\frac{x-y}{-\sqrt{2}}=0$, 在 xy 面内第 II 卦限; (4) 法线式为 $\frac{x-z}{-\sqrt{2}}=0$, 在 zx 面内第 IV 卦限; (5) $x-2=0$, $\boldsymbol{i}$. **2**. (1) $x\cos\frac{2\pi}{3}+y\cos\frac{\pi}{4}+z\cos\frac{2\pi}{3}-5=0$, $x-\sqrt{2}y+z+10=0$; (2) $\frac{-3x+4y+12z}{13}=0$, $-3x+4y+12z=0$.

4. 不同. **5**. $\frac{\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)}{\varepsilon|\boldsymbol{m}|}=0$, $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_0>0$, $\varepsilon=+1$; $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_0<0$, $\varepsilon=-1$.

6. $\frac{(\boldsymbol{P}_2\times\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_3\times\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2)\cdot\boldsymbol{P}-(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)}{\varepsilon|\boldsymbol{P}_2\times\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_3\times\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2|}=0$, $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)>0$, $\varepsilon=+1$; $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)<0$, $\varepsilon=-1$. **7**. $\frac{ax+by+cz-(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0$.

8. $\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=0$, $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

习题 3·4 **1**. $+3$, -4; 两侧. **3**. $\lambda<-\frac{1}{6}$. **5**. $y^2+2zx=0$. **6**. $3x^2+8y^2+35z^2-36yz-24zx+12xy-8x-12y+24z+4=0$. **7**. 高为 3. **8**. $x+2y+2z-9=0$ 或 $y-2=0$.

习题 3·5 **2**. $k=\pm1$. **3**. (1) $k=-1$, (2) $k=1$. **4**. (1) $k=0$, π_2

过原点; (2) $k<0$, π_1, π_2 在原点两侧; (3) $k=3$, π_1 与 π_2 重合; (4) $0<k<3$, π_1 与 π_2 均在原点同侧, 且 π_1 离原点较远; (5) $k>3$, π_1 与 π_2 均在原点同侧, 且 π_2 离原点较远. **5**. (1) $25x+17y+62z-78=0$ 位于锐角区域内, (2) $x+35y-10z-156=0$ 位于钝角区域内. **6**. $\arccos\frac{16}{21}$. **7**. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p\pm k=0$. **9**. d_1, d_2, d_3 成等差数列.

习题3·6 **1**. (1) 三棱柱; (2) 平面束; (3) 三面角顶点是(1, 2, 3); (4) 三平面平行不重合; (5) 两平面平行, 第三面与之相交. **2**. $a^2+b^2+c^2+2abc=1$. **3**. (1) $a\neq 7$; (2) $a=7$, $b=3$; (3) $a=7$, $b\neq 3$. **4**. (1) $a=b=c$ 时, 重合; (2) $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$ 时, 为平面束; (3) $b=c\neq a$ 或 $c=a\neq b$ 或 $a=b\neq c$ 时, 两平面重合, 第三面与之相交. **5**. (1) $a=b=c\neq 0$ 时, (i) $k\neq a$ 时, 三平行平面, (ii) $k=a$ 时, 表示一个平面; (2) $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$ 时, 三面角的顶点是 $\left[\frac{(c-k)(k-b)}{(c-a)(a-b)}, \frac{(a-k)(k-c)}{(a-b)(b-c)}, \frac{(b-k)(k-a)}{(b-c)(c-a)}\right]$; (3) $a=b\neq c$ 时, (i) $k=a\neq 0$ 或 $k=c\neq 0$ 时, 为平面束, (ii) $k=a=0$ 或 $k=c=0$ 时, 两平面重合, 第三面与之相交; (iii) $a=0$, $c\neq 0$, $k\neq 0$ 或 $a\neq 0$, $c=0$, $k\neq 0$ 时, 为两平行平面, 第三面与之相交; (iv) $k\neq a$, $a\neq 0$ 或 $k\neq c$, $c\neq 0$ 时, 为三棱柱; (4) $b=c\neq a$ 时, 同(3); (5) $c=a\neq b$ 时, 同(3).

习题3·7 **1**. $7x-y+z-18=0$. **2**. $7x-y+z-18=0$. **3**. (1) $x+y+z-2=0$; (2) $2x+3y+4z-4=0$. **4**. (1) $3y-5z=4$; (2) $z+3x=4$; (3) $5x+y=8$. **5**. $\begin{vmatrix} x & y & z & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ 或 $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}z=0$. **6**. $a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)+c_1(z-z_0)=0$ 或 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=0$. **8**. $2x+6y+3z-3=0$.

9. $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} u_3 = 0$ 等等。

复习题三

1. (1) $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}=0$; (2) $(b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{P}+d=0$; (3) $(b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{P}=0$; (4) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{P}+d=0$. 2. $\frac{\sqrt{3}}{3}|k|$, $\left\{\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3}, \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3}, \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3}\right\}$, $k>0$, $\varepsilon=1$; $k<0$, $\varepsilon=-1$. 3. $x+y+z=\pm\sqrt{3}p$. 4. $P_0\left(\frac{-d}{a+b+\sqrt{2}c}, \frac{-d}{a+b+\sqrt{2}c}, \frac{-\sqrt{2}d}{a+b+\sqrt{2}c}\right)$, 其中 $d(a+b+\sqrt{2}c)<0$. 5. (1) $\left(\frac{-d}{a+b+c}, \frac{-d}{a+b+c}, \frac{-d}{a+b+c}\right)$, $a+b+c\neq 0$; (2) $\left(\frac{-d\cos\alpha}{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}, \frac{-d\cos\beta}{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}, \frac{-d\cos\gamma}{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}\right)$, $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma\neq 0$; (3) 同(2), 但 $\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$.

7. $\left(\frac{p}{\lambda+\mu+\nu}, \frac{p}{\lambda+\mu+\nu}, \frac{p}{\lambda+\mu+\nu}\right)$, $\lambda+\mu+\nu\neq 0$. 8. $\left(\frac{1}{a}[-d\pm k\sqrt{a^2+b^2+c^2}], 0, 0\right)$, $a\neq 0$ 等. 9. $\left(\frac{p_1\pm p_2}{\cos\alpha_1\pm\cos\alpha_2}, 0, 0\right)$, $\cos\alpha_1\pm\cos\alpha_2\neq 0$ 等. 11. (1) $(a_1d_2-a_2d_1)x+(b_1d_2-b_2d_1)y+(c_1d_2-c_2d_1)z=0$ 或 $d_2u_1-d_1u_2=0$; (2) $(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2)u_1-(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1)u_2=0$; (3) $(a_2a+b_2b+c_2c)u_1-(a_1a+b_1b+c_1c)u_2=0$. 15. 表面积为 $4\sqrt{3}a^2$, 体积为 $\frac{4}{3}a^3$. 17. 除第二平面外, 其余四平面有一公共点$\left(\frac{9}{2}, -1, \frac{5}{2}\right)$. 19. $x^2+y^2-2az=0$. 20. 已知 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p_i=0\,(i=1, 2)$得 $x(1-k)\cos\alpha+y(1-k)\cos\beta+z(1-k)\cos\gamma-p_1+kp_2=0$ (k 是比例常数). 21. 已知 $x\cos\alpha_i+y\cos\beta_i+z\cos\gamma_i-p_i=0\,(i=1, 2)$ 得 $x(\cos\alpha_1-k\cos\alpha_2)+y(\cos\beta_1-k\cos\beta_2)+z(\cos\gamma_1-k\cos\gamma_2)-p_1+kp_2=0$. 23. 平面. 26. $\frac{1}{6}\left|\frac{\Delta^3}{D_1D_2D_3D_4}\right|$. 27. $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+p_1\boldsymbol{N}_1^0+p_2\boldsymbol{N}_2^0+p_3\boldsymbol{N}_3^0$. 29. (1) $d_1d_1'<0$, $d_2d_2'<0$, $d_3d_3'<0$;

(2) $(a_ix_0+b_iy_0+c_iz_0+d_i)(a_ix_0+b_iy_0+c_iz_0+d_i')<0(i=1, 2, 3)$;
(3) $d+d_1'=0$, $d_2+d_2'=0$, $d_3+d_3'=0$;　(4) $2(a_ix_0+b_iy_0+c_iz_0)+d_i+d_i'=0(i=1, 2, 3)$　**30**. $\lambda_1+\lambda_2=0$。

思 考 题 三

3. 设 $D=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$，用 A, B, C 表示 a, b, c 的代数余子式，
(1) $\phi(x, y, z)=0$ 表示一对重合平面的充要条件是 $A=B=C=D=0$;
(2) $\phi(x, y, z)=0$ 表示一对实的相交平面的充要条件是 $A+B+C<0$, $D=0$; (3) $\phi(x, y, z)=0$ 表示一对虚的相交平面的充要条件是 $A+B+C>0$, $D=0$; (4) $\phi(x, y, z)=0$ 表示一对实的相交平面，交角是 θ，则 $\operatorname{tg}\theta=\pm\frac{2\sqrt{-(A+B+C)}}{a+b+c}$。

第 四 章

习题 4·1　**1**. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$, $S=\{2, 3, -2\}$。　**2**. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\sqrt{2}}=\frac{z-1}{-1}$。　**3**. $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$, $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{0}$ 等。
4. (1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$; (2) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$;
(3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{0}$; (4) $x=y=z$。　**5**. (1) $x=1+t$, $y=-7t$, $z=-2-19t$; (2) $x=1-t$, $y=2+3t$, $z=-1+5t$。　**7**. (1) $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t(\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_1)$, $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t(\boldsymbol{P}_4-\boldsymbol{P}_2)$; (2) $(\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_1)\times(\boldsymbol{P}_4-\boldsymbol{P}_2)=0$;
(3) $(\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_1)\cdot(\boldsymbol{P}_4-\boldsymbol{P}_2)=0$。　**8**. $x=3-6t$, $y=-1+18t$, $z=-5+9t$。　**9**. $x=-7+4t$, $y=12-4t$, $z=5-2t$。　**10**. $\alpha=\beta=p=q=1$。
12. $\alpha\alpha'+\beta\beta'+1=0$。　**13**. $\left(0, y_0-\frac{m}{l}x_0, z_0-\frac{n}{l}x_0\right)$, $\left(x_0-\frac{l}{m}y_0, 0, z_0-\frac{n}{m}y_0\right)$, $\left(x_0-\frac{l}{n}z_0, y_0-\frac{m}{n}z_0, 0\right)$。　**14**. $(-x_1, -y_1, -z_1)$, $(2a-x_1, 2b-y_1, 2c-z_1)$。

习题4·2 1. 距离等于6. 2. $\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}\right|$.

3. $\sqrt{l^2+m^2+n^2}\left|\frac{ax_*+by_*+cz_*+d}{al+bm+cn}\right|$. 4. $a\alpha+b\beta+c=0$, $ap+bq+d=0$. 5. 交点为 (0, 5, 4)，交角为 $\arcsin\frac{1}{15}\sqrt{105}$. 6. $\boldsymbol{P}_1+\frac{d^2-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_1}{\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)}(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)$. 7. $\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{v})+d=0$, $t=-\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{P}_0+d}{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v}}$.

8. $\arccos\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{m}|}$ 等; $\arcsin\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{i}|}{|\boldsymbol{m}|}$ 等. 9. $\arcsin\frac{|\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{i}|}{|\boldsymbol{S}|}$ 等; $\arccos\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{S}|}$ 等.

习题4·3 1. (1) 重合; (2) 相交，交点 (3, −1, 4). 2. $k=m$, $[n(\beta_2-\beta_1)-m(\gamma_2-\gamma_1)](x-\alpha_1)+[l(\gamma_2-\gamma_1)-n(\alpha_2-\alpha_1)](y-\beta_1)+[m(\alpha_2-\alpha_1)-l(\beta_2-\beta_1)](z-\gamma_1)=0$. 3. $k=2$, 交点为 (3, 1, 0)，平面方程为 $x-y-z-2=0$. 4. $(p_1-p_2)(\beta_1-\beta_2)=(q_1-q_2)(\alpha_1-\alpha_2)$. 5. $(a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ c_1+c_2)$, $(b_1c_2-b_2c_1)x+(c_1a_2-c_2a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)z=0$. 7. $\sqrt{\boldsymbol{P}_0^2-(\boldsymbol{P}_0\cdot\boldsymbol{S}^0)^2}$, $\boldsymbol{P}_0-(\boldsymbol{P}_0\cdot\boldsymbol{S}^0)\boldsymbol{S}^0$.

8. $\begin{vmatrix} a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1 & a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2 \\ a_1l+b_1m+c_1n & a_2l+b_2m+c_2n \end{vmatrix}=0$, $(a_1l+b_1m+c_1n)\times(a_2l+b_2m+c_2n)\neq0$. 9. (1, 2, 3). 10. $11x+2y-7z+6=0$, $7x+y-5z+7=0$; $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 11. $\frac{|ny_0-mz_0|}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $\frac{|lz_0-nx_0|}{\sqrt{n^2+l^2}}$, $\frac{|mx_0-ly_0|}{\sqrt{l^2+m^2}}$.

12. $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{S})=0$, $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{S},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{S})=0$; $\frac{|(\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{k}\boldsymbol{S})|}{|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{S}|}$.

习题4·4 1. $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$; $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$, 其中 $\boldsymbol{P}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$, $\boldsymbol{S}=\{a,b,c\}$. 2. $l(x-a)+m(y-b)+n(z-c)=0$; $\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A})=0$, 其中 $\boldsymbol{m}=\{l,m,n\}$, $\boldsymbol{A}=\{a,b,c\}$. 3. $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$; $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{S}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\{a,b,c\}$, $\boldsymbol{S}=\{l,m,n\}$. 4. $(b_1c_2-b_2c_1)(x-a)+(c_1a_2-c_2a_1)(y-b)+(a_1b_2-a_2b_1)(z-c)=0$; $\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A})=0$, 其中 $\boldsymbol{m}=\{b_1c_2-b_2c_1,\ c_1a_2-c_2a_1,\ a_1b_2-a_2b_1\}$, $\boldsymbol{A}=\{a,b,c\}$. 5. $\frac{x-a}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y-b}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z-c}{a_1b_2-a_2b_1}$; $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{S}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\{a,b,c\}$, $\boldsymbol{S}=\{b_1c_2$

$-b_2c_1, \quad c_1a_2-c_2a_1, \quad a_1b_2-a_2b_1\}$. **6**. $\dfrac{x-a}{m_1n_2-m_2n_1}=\dfrac{y-b}{n_1l_2-n_2l_1}=\dfrac{z-c}{l_1m_2-l_2m_1}$. **7**. 同第6题，其中 $l_1=b_1c_2-b_2c_1$, $m_1=c_1a_2-c_2a_1$, $n_1=a_1b_2-a_2b_1$; $l_2=b_3c_4-b_4c_3$, $m_2=c_3a_4-c_4a_3$, $n_2=a_3b_4-a_4b_3$.

8. $\dfrac{x-a}{m_3n_1-m_1n_3}=\dfrac{y-b}{n_3l_1-n_1l_3}=\dfrac{z-c}{l_3m_1-l_1m_3}$，其中 $l_3=\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ b-y_2 & c-z_2 \end{vmatrix}$, $m_3=\begin{vmatrix} n_2 & l_2 \\ c-z_2 & a-x_2 \end{vmatrix}$, $n_3=\begin{vmatrix} l_2 & m_2 \\ a-x_2 & b-y_2 \end{vmatrix}$.

9. $\dfrac{x-a}{\begin{vmatrix} b_4\alpha-b_3\beta, & c_4\alpha-c_3\beta \\ c_1a_2-c_2a_1, & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}}=\dfrac{y-b}{\begin{vmatrix} c_4\alpha-c_3\beta, & a_4\alpha-a_3\beta \\ a_1b_2-a_2b_1, & b_1c_2-b_2c_1 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-c}{\begin{vmatrix} a_4\alpha-a_3\beta & b_4\alpha-b_3\beta \\ b_1c_2-b_2c_1 & c_1a_2-c_2a_1 \end{vmatrix}}$ 其中 $\alpha=aa_3+bb_3+cc_3+d_3$, $\beta=aa_4+bb_4+cc_4+d_4$. **10**. $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$. **11**. 同第10题，其中 $l_1=b_1c_2-b_2c_1$, $m_1=c_1a_2-c_2a_1$, $n_1=a_1b_2-a_2b_1$; $l_2=b_3c_4-b_4c_3$, $m_2=c_3a_4-c_4a_3$, $n_2=a_3b_4-a_4b_3$. **12**. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$.

13. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1c_2-b_2c_1 & c_1a_2-c_2a_1 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}=0$. **14**. $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{m})=0$. **15**. $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ l & m & n \\ mn-l^2 & nl-m^2 & lm-n^2 \end{vmatrix}=0$. **17**. $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+t(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{S})$. **18**. $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+t[\boldsymbol{m}\times(\overrightarrow{AP_0}\times\boldsymbol{S})]$.

复 习 题 四

1. 第一面 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y+\frac{d}{b}}{-c}=\dfrac{z}{b}$, $b\neq0$; $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{-c}=\dfrac{z+\frac{d}{c}}{b}$, $c\neq0$. **2**. 第

—面$\left(0,\ \frac{c_1d_2-c_2d_1}{b_1c_2-b_2c_1},\ \frac{d_1b_2-d_2b_1}{b_1c_2-b_2c_1}\right)$. **3**. (1) $d=-4$; (2) $d=9$; (3) $d=3$. **4**. (1) $d_1=d_2=0$; (2) $a_1=a_2=0,\ d_1^2+d_2^2\neq 0$; (3) $b_1=b_2=0,\ d_1=d_2=0$; (4) $c_1d_2-c_2d_1=0,\ c_1c_2\neq 0$. **5**. (1) $b_1c_2-b_2c_1=0,\ d_1^2+d_2^2\neq 0$; (2) $a_1b_2-a_2b_1=0;\ d_1=d_2=0$. **7**. $x=y=z$. **8**. $\pm\sqrt{2}x+y+z=0$. **9**. $(\boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2,\ \boldsymbol{m}_3)=0$. **10**. $(\boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2,\ \boldsymbol{S}_3)=0,\ (\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=0$. **11**. $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0,\ \boldsymbol{S},\ \boldsymbol{T})=0$. **12**. (1) $\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$;

(2) $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}=0$; (3) $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ b_1c_2-b_2c_1 & c_1a_2-c_2a_1 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}=0$; (4) $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}=0$. **13**. $(a_2l+b_2m+c_2n)(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)=(a_1l+b_1m+c_1n)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)$, 但 $\frac{l}{b_1c_2-b_2c_1}$, $\frac{m}{c_1a_2-c_2a_1}$, $\frac{n}{a_1b_2-a_2b_1}$ 不都相等. **14**. $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, $(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2)(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)=(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)$. **15**. $(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_0)+(c_1a_2-c_2a_1)\times(y-y_0)+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_0)=0$, $(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2)(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)=(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)$. **16**. $x+2y+2z-1=0$. **17**. $3x-4y+z=0$. **22**. 与 l_1 及 l_2 平行的一直线. **23**. (1) $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0,\ \boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2)=0$; (2) $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0,\ \boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0,\ \boldsymbol{S})=0$; (3) $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\{(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)\times[(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0)\times\boldsymbol{S}]\}$. **24**. 射影: $\boldsymbol{P}_0+\frac{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_0)\cdot\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}}\boldsymbol{S}$, 对称点: $-\boldsymbol{A}+2\left[\boldsymbol{P}_0+\frac{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_0)\cdot\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}}\boldsymbol{S}\right]$.

思 考 题 四

1. 设截距是 $l,\ m,\ n$, 则 $l^2=\frac{1}{8}(b^2+c^2-a^2)$, $m^2=\frac{1}{8}(c^2+a^2-b^2)$, $n^2=\frac{1}{8}(a^2+b^2-c^2)$, 顶点为 $A(-l,\ m,\ n)$, $B(l,\ -m,\ n)$, $C(l,\ m,\ -n)$. **3**. 用第 2 题化成对称式. **5**. (1) $\boldsymbol{S}\cdot[(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})]$

$\neq 0$; (2) $\boldsymbol{P}_0-\dfrac{\boldsymbol{P}_0\cdot[(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})]-(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})}{\boldsymbol{S}\cdot[(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})]}\cdot\boldsymbol{S}$.

(3) $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{C}-\boldsymbol{P},\boldsymbol{S})$与$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{S})$及$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{B}-\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{S})$同号.

第 五 章

习题5·1 **1.** 当三点共线时，轨迹不存在；三点不共线时，轨迹是过这三角形的外心所作这平面的垂线.

习题5·2 **1.** (1) 三个平面 $x=a$, $y=b$, $z=c$; (2) $(0,0,0)$二重点; (3) 曲面; (4) 点(a,b,c); (5) 虚轨迹; (6) 无数点$\left(0,\ 0,\ n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\right)$, n表示0及整数. **3.** $x^2+y^2-3z^2-6z+9=0$.
4. $(x-y)^2+2(x+y)-1=0$. **5.** (1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$, $a^2-b^2=c^2$; (2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$, $a^2+b^2=c^2$. **6.** $x=a\cos\phi\cos\theta$, $y=a\cos\phi\sin\theta$, $z=a\sin\phi\left(-\pi<\theta\leqslant\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

习题5·3 **1.** (1) $x-a=0$, $z=0$; $y-b=0$, $z=0$表示两条直线; (2) $(0,0,0)$; (3) 虚轨迹; (4) 虚轨迹. **3.** $\pm x=\pm y=\pm z$. **4.** $\pm x=\pm y=\pm z$. **5.** 已知两定点P_1和P_2及另外两定点P_3和P_4，当$P_1P_2\,/\!/\,P_3P_4$时，无轨迹；当$P_1P_2\not\parallel P_3P_4$时，轨迹是一条直线. **6.** $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $z=a^2\cos 2\theta\,(0<\theta\leqslant 2\pi)$. **7.** (1) $x+y=a$; (2) $x+y=a$, $(x-y)^2+z^2=a^2$.

习题5·4 **1.** $P_1\left(\frac{a_1-a_2}{2},\ \frac{b_1-b_2}{2},\ \frac{c_1-c_2}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{a_2-a_1}{2},\ \frac{b_2-b_1}{2},\ \frac{c_2-c_1}{2}\right)$. **2.** (1) $ax'+by'+cz'=0$; (2) $\frac{x'}{l}=\frac{y'}{m}=\frac{z'}{n}$; (3) $x'^2+y'^2+z'^2=a^2+b^2+c^2-d$. **3.** $x'^2-y'^2+z'^2=1$. **5.** $x=\frac{x'}{\sqrt{21}}+\frac{2y'}{\sqrt{6}}+\frac{2z'}{\sqrt{14}}$, $y=\frac{4x'}{\sqrt{21}}-\frac{y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{14}}$, $z=\frac{2x'}{\sqrt{21}}+\frac{y'}{\sqrt{6}}-\frac{3z'}{\sqrt{14}}$. **6.** 同第5题.
7. $x=\frac{x'}{\sqrt{21}}+\frac{2y'}{\sqrt{6}}+\frac{2z'}{\sqrt{14}}+1$, $y=\frac{4x'}{\sqrt{21}}-\frac{y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{14}}+1$, $z=\frac{2x'}{\sqrt{21}}+\frac{y'}{\sqrt{6}}-\frac{3z'}{\sqrt{14}}+1$. **8.** $z=\frac{2}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'$. **9.** (1) $z'=0$; (2) $x'=0=y'$; (3) $z'^2=2(x'^2+y'^2)$.

习题5·5 1. (1) 2次代数曲面; (2) 超越曲面. 2. 超越曲面，交点为$(0, 0, n\pi)$ (n表示0及整数). 3. (1) 3次; (2) 4次. 5. 4次.

复习题五

2. $(2\sqrt{3}, 0, -\sqrt{2})$. 4. $x'=\sec\theta\cdot f(t)$, $y'=0$, $z'=\phi(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$. 5. 6次. 7. $\sum_{r=1}^{n}k_r(x^2+y^2+z^2)-2x\sum_{r=1}^{n}k_rx_r-2y\sum_{r=1}^{n}k_ry_r-2z\sum_{r=1}^{n}k_rz_r+\sum_{r=1}^{n}k_r(x_r^2+y_r^2+z_r^2)-k^2=0$.

第六章

习题6·1 1. 球心: $(1, -2, 3)$, 半径: 5. 3. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(a-x_0)^2+(b-y_0)^2+(c-z_0)^2$. 4. (1) $[\nu(b-y_0)-\mu(c-z_0)]^2+[\lambda(c-z_0)-\nu(a-x_0)]^2+[\mu(a-x_0)-\lambda(b-y_0)]^2=r^2$; (2) $(x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p)^2=r^2$. 5. $x=r\cos\phi\cos\theta$, $y=r\cos\phi\sin\theta$, $z=r\sin\phi$ (1) $0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $-\pi<\theta\leqslant\pi$; (2) $-\frac{\pi}{2}\leqslant\phi\leqslant 0$, $-\pi<\theta\leqslant\pi$; (3) $0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. 6. $7(x^2+y^2+z^2)-15x-25y-11z=0$. 7. $y=1$. *8. $10(x^2+y^2+z^2)+71x-68y-89z-185=0$. 11. $-(r\sqrt{a^2+b^2+c^2}+ax_0+by_0+cz_0)\leqslant\lambda\leqslant r\sqrt{a^2+b^2+c^2}-(ax_0+by_0+cz_0)$, $\sqrt{r^2-\left(\frac{ax_0+by_0+cz_0+\lambda}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2}$. 12. $x^2+y^2+z^2=a^2+1$, $(a+1)x-(a-1)y=0$. 13. (1) $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$; (2) $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$;

圆心$\left[\frac{a(b^{-2}+c^{-2})}{2(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})}, \frac{b(c^{-2}+a^{-2})}{2(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})}, \frac{c(a^{-2}+b^{-2})}{2(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})}\right]$,

半径$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$.

习题6·2 1. $9(2y+z-1)^2+4(z-3x)^2+(3x+2y-7)^2=196$.
2. $4[(y-z+8)^2+(z-x-3)^2+(x-y-5)^2]=3[(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2]$. 3. $|(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)\times\boldsymbol{S}^0|=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_0)\times\boldsymbol{S}^0|$. 4. $|(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)\times$

$S^0||A-P_0|=|(A-P_0)\times S^0||P-P_0|$. 5. $|P_0\times S^0|=|k\times S^0||P|$. 6. 轴的方向数: $S=\{a, b, c\}$; 底半径: $\frac{1}{|S|}$. 7. (1) $x=\frac{a}{\pm\sqrt{1+k^2}}$, $y=kx$; (2) $z=\pm\sqrt{1+k^2}\operatorname{ctg}\theta\cdot x$, $y=kx$. 8. (1) $\theta=\theta_0$ 时, 表示直线 $x=a\cos\theta_0$, $y=a\sin\theta_0$; (2) $v=v_0$ 时, 表示圆 $x^2+y^2=a^2$, $z=v_0$. 9. (1) $x=a\cos u$, $y=a\sin u$, $z=v(0<u\leqslant 2\pi, -\infty<v<+\infty)$; (2) $x=|v|\sin\theta\cos u$, $y=|v|\sin\theta\sin u$, $z=v\cos\theta(0<u\leqslant 2\pi, -\infty<v<+\infty)$. (3) 交线: 两个圆 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\pm a\operatorname{ctg}t(0<t\leqslant 2\pi)$. 10. $4(x-2y)^2+20z^2=19$.

习题 6·3 1. $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. 2. (1) $z^2=x+y$; (2) $x^2-y^2=z^2$; (3) $x^2+4y^2-16z^2=16$. 3. (1) $mzx=cy$; (2) $x^2+4y^2-9z^2=1$; (3) $x^2-4y^2+9z^2=1$. 4. $z^2-xy=c^2$. 5. $(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=x^2+y^2$. *6. $yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$.

习题 6·4 1. (1) $(ny-mz)^2=2pn(nx-lz)$; (2) $[y_0(z-z_0)-z_0(y-y_0)]^2=2p(z-z_0)[x_0(z-z_0)-z_0(x-x_0)]$. 2. (1) $(a_2l+b_2m+c_2n)\times(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)=(a_1l+b_1m+c_1n)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)$; (2) $(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2)(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)=(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)$. 3. (1) z 轴; (2) z 轴; (3) z 轴; (4) 0, 1, -1; (5) 1, -1, 1. 4. (1) (0, 0, 0); (2) (0, 0, 0). 5. (1) 柱面; (2) 锥面; (3) 劈锥面. 6. $y^2=-2k\left(z-\frac{k}{2}\right)$, 抛物柱面. 7. 原点为顶点, z 轴为轴的直圆锥面. 8. (1) $3y^2-2z^2+25=0$, $5z^2+3x^2-100=0$, $2x^2+5y^2-25=0$. (2) $y^2-1=0$, $x^2-z=0$. 13. $(y^2-r^2)(z-a)^2+a^2x^2=0$. 14. $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=x$. 15. 定直线 $y=\pm mx$, $z=\pm c$; 定平面 $\lambda x+\mu y+\nu z=0$ 所产生曲面是 $m(z+c)[\lambda x+\mu y+\nu(z-c)]=c(\lambda+m\mu)(y+mx)$.

复习题六

1. 圆心(0, 0, 0); 半径=5; 平面方程: $4x=3y$. 2. (1) 两圆 $x=$

$a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $z=\pm\sqrt{r^2-a^2}(0<\theta\leqslant 2\pi)$; (2)两圆 $x=r\sin\theta\cos t$, $y=r\sin\theta\sin t$, $z=\pm r\cos\theta(0<t\leqslant 2\pi)$. **3**. 四条与 z 轴平行的直线 $x=\pm\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, $y=\pm\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{2}}$. **4**. $y^2=z^2$, $z=x^3$, $y=x^2$. **6**. (1) 以原点为心, xy 平面上方半个单位球面; (2) 椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **13**. $yz+zx+xy=0$, $-yz+zx+xy=0$, $yz-zx+xy=0$, $yz+zx-xy=0$. **16**. 球面. **17**. 抛物柱面 $x=u+v$, $y=u-v$, $z=4u^2$ $(-\infty<u, v<+\infty)$. **19**. $xy=cz$. **21**. $c^2y^2=4ax(z-c)^2$. **22**. $ayz+bzx+cxy+abc=0$. **23**. $(y^2+z^2)^3=a^2x^4$, $y^3=a(x^2+z^2)$. **24**. $x^2(y^2+z^2)=a^4$, $y^2(x^2+z^2)=a^4$. **25**. $x^2+y^2=[f(z)]^2+[g(z)]^2$. **26**. (1) $x^2+y^2=2pz$, $y=\lambda x$; (2) $x^2+y^2=2pz$, $z=\mu$; (3) $x^2+y^2=2p(ax+by+c)$. **27**. $\arccos\dfrac{16}{21}$. **29**. $\dfrac{bn^2+cm^2}{fmn}=\dfrac{cl^2+an^2}{gnl}=\dfrac{am^2+bl^2}{hlm}$. **30**. (1) 柱面; (2) 柱面; (3) 旋转曲面; (4) 劈锥面; (5) 锥面; (6) 柱面; (7) 锥面; (8) 旋转曲面.

第 七 章

习题 7·1 **1**. (1) 椭圆面; (2) 双叶双曲面; (3) 单叶双曲面; (4) 单叶双曲面; (5) 双叶双曲面; (6) 虚椭圆面. **2**. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$. **3**. (1) $x^2+4y^2+z^2=9$; (2) $21x^2+7y^2+4z^2=127$. **5**. $(1, 1, -2)$; $\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \dfrac{\sqrt{15}}{3}, \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **6**. $x=a\cos u\cos v$, $y=b\sin u\cdot\cos v$, $z=c\sin v\left(-\pi<u\leqslant\pi, -\dfrac{\pi}{2}\leqslant v\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$; $x=a\cos u\sec v$, $y=b\sin u\cdot\sec v$, $z=c\operatorname{tg} v$ $\left(-\pi<u\leqslant\pi, -\dfrac{\pi}{2}<v<\dfrac{\pi}{2}\right)$; $x=a\cos u\operatorname{tg} v$, $y=b\sin u\operatorname{tg} v$, $z=c\sec v$ $\left(-\pi<u\leqslant\pi, 0\leqslant v\leqslant\pi, v\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$. **7**. $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}<1$. **9**. 直线 $\dfrac{x}{a^2l}=\dfrac{y}{b^2m}=\dfrac{z}{c^2n}$. **10**. 椭圆面.

习题 7·2 **1**. (1) 双曲抛物面; (2) 椭圆抛物面; (3) 双曲抛物面. **2**. (1) 无交点, (2) 直线在曲面上. **3**. (1) $4x^2-y^2=4z$; (2) $2x^2$

$+y^2=2z$. **4.** (1) $x=a\sqrt{2|v|}\cos u$, $y=b\sqrt{2|v|}\sin u$, $z=cv$ ($c>0$, $0\le u\le 2\pi$, $0<v<+\infty$; $c<0$, $0<u\le 2\pi$, $-\infty<v<0$). (2) $x=a(u+v)$, $y=b(u-v)$, $z=2cuv$. **5.** 双曲抛物面. **7.** $I_2=ab-h^2$, $I_2>0$: 椭圆抛物面, $I_2<0$: 双曲抛物面, $I_2=0$: 抛物柱面.

习题 7·3 **1.** $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4/3}{-4}$, $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-4/3}{10}$.

2. $\frac{x-a\cos\alpha}{a\sin\alpha}=\frac{y-b\sin\alpha}{-b\cos\alpha}=\frac{z}{\pm c}$. **3.** $y=\lambda$, $z=\lambda x$; $x=\mu$, $z=\mu y$.

4. $x=\lambda$, $x+y=\frac{z}{\lambda}$; $x+y=\mu$, $x=\frac{z}{\mu}$. **7.** $\frac{x-a\rho\cos\theta}{a}=\frac{y-b\rho\sin\theta}{\pm b}$

$=\frac{z-\frac{\rho^2}{2}\cos 2\theta}{\rho(\cos\theta\mp\sin\theta)}$. ***9.** $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

***10.** $2z+a^2-b^2=0$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$.

习题 7·4 **4.** $x^2+y^2+z^2\le a^2$, $x^2+y^2-ax\le 0$, $x\le 0$.

习题 7·5 **1.** (1) 一对平行平面; (2) 单叶双曲面; (3) 实锥面; (4) 球面; (5) 单叶双曲面; (6) 实锥面; (7) 抛物柱面; (8) 锥面.

2. (1) $\lambda<0$: 单叶双曲面; $\lambda=0$: 实锥面; $\lambda>0$: 双叶双曲面. (2) $\lambda\ne 0$: 双叶双曲面; $\lambda=0$: 实锥面; (3) $\lambda+\frac{1}{4}>0$: 椭圆面; $\lambda+\frac{1}{4}=0$: 虚锥面; $\lambda+\frac{1}{4}<0$: 虚椭圆面. **3.** (1) a、b、c 均正时, 为椭圆面; 均负时, 为虚椭圆面; 两正一负时, 为单叶双曲面; 两负一正时, 为双叶双曲面. (2) $ab>0$ 时, 为椭圆抛物面; $ab<0$ 时, 为双曲抛物面.

4. (1) 等轴双曲线; (2) 两个圆; (3) 立方抛物线; (4) 两个圆; (5) 圆; (6) 两个双曲线; (7) 两对重合直线. **5.** 比 $\lambda>0$ 时, (1) 定点在定平面上: $\lambda=1$ 时, 为一对虚的相交平面; $0<\lambda<1$ 时, 为虚锥面; $\lambda>1$ 时, 为直圆锥面. (2) 定点不在定平面上: $\lambda=1$ 时, 为旋转椭圆抛物面; $0<\lambda<1$ 时, 为旋转椭圆面; $\lambda>1$ 时, 为旋转双叶双曲面. [注意]$\lambda=0$ 时, 轨迹是定点; $\lambda\to\infty$ 时, 轨迹是定平面. **6.** 比 $\lambda>0$ 时, (1) 定点在定直线上, $\lambda=1$ 时, 为一对重合平面; $\lambda>1$ 时, 为实锥面; $0<\lambda<1$ 时, 为虚锥面. (2) 定点不在定直线上, $\lambda=1$ 时, 为抛物柱面; $\lambda>1$ 时, 为旋转单叶双曲面; $0<\lambda<1$ 时, 为旋转椭圆面. ($\lambda=0$ 时, 轨迹是定点; $\lambda\to\infty$ 时, 轨迹是定直线.)

复 习 题 七

1. $z=a(-1\pm\sqrt{2})$. 2. $x=\lambda$, $\lambda(y+z)=-x-y-1$; $y+z=\mu$, $\mu x=-x-y-1$. 3. $cx\sqrt{a^2-b^2}\pm az\sqrt{b^2-c^2}=0$. 4. (1) 两异面直线为 $x=0$, $z=c$; $y=0$, $z=-c$ 时，则球心轨迹是 $x^2-y^2-4cz=0$; (2) 两异面直线为 $y=mx$, $z=c$; $y=-mx$, $z=-c$ 时，则球心轨迹是 $mxy+cz(1+m^2)=0$. 9. $\lambda\neq a^2$, $\lambda\neq b^2$, $\lambda\neq c^2$ 时除去; $a^2>\lambda_1>b^2>\lambda_2>c^2>\lambda_3$, $\lambda=\lambda_1$ 时，表示双叶双曲面; $\lambda=\lambda_2$ 时，表示单叶双曲面; $\lambda=\lambda_3$ 时，表示椭圆面. 10. $\lambda\neq a^2$, $\lambda\neq b^2$ 时应除去; $+\infty>\lambda_1>a^2>\lambda_2>b^2>\lambda_3>-\infty$, $\lambda=\lambda_1$, λ_3 时，表示椭圆抛物面; $\lambda=\lambda_2$ 时，表示双曲抛物面.

11. $\dfrac{x^2}{a^2-b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$.

第 八 章

习题 8·1 1. $a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2=0$ 母线; $a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2\neq0$ 切线. 2. 母线. 4. (1) 无; (2) z 轴上的点. 5. 母线方程为 $\dfrac{\lambda}{\sqrt{a^{-1}}}=\dfrac{\mu}{\pm\sqrt{-b^{-1}}}=\dfrac{\nu}{x_0\sqrt{a}\pm y_0\sqrt{-b}}$ $(a>0,\ b<0)$. 6. $x=1$, $z=3$; $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$.

习题 8·2 1. (1) $\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{y}{y_0}-\dfrac{z}{z_0}=1$; (2) $x_0x+z_0y+y_0z=a^2$. 4. $(a^4+b^4+c^4)\left(\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}\right)^2=k^2$. 5. (8, 9, 5). 7. $(x^2+y^2+z^2)z+kxy=0$. 8. $2x-12y+9z=5$, $4x+6y+3z=5$.

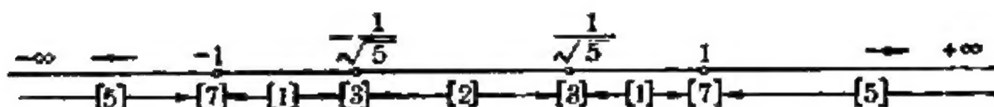
习题 8·3 1. (1) $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$; (2) $R_O=2$, $R_A=3$, 无中心; (3) 一条直线 $\dfrac{x-5}{-16}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{11}$ 的中心; (4) $R_O=1$, $R_A=2$, 无中心; (5) 一个平面 $x-y+z=1$ 的中心. 2. $14x'^2+14y'^2+8z'^2-4y'z'-4z'x'-8x'y'=4$. 3. (1) $abc\neq0$ 时，中心为 (0, 0, 0); $a=0$, $bc\neq0$ 时，中心为 $y=0$, $z=0$; $b=0$, $ca\neq0$ 时，中心为 $z=0$, $x=0$; $c=0$, $ab\neq0$ 时，中心为 $x=0$, $y=0$; $b=c=0$, $a\neq0$ 时，中心为 $x=0$; $c=a=0$,

$b\neq0$ 时，中心为 $y=0$； $a=b=0$, $c\neq0$ 时，中心为 $z=0$. (2) $ab\neq0$ 时，无心； $a=0$, $b\neq0$ 时，无心； $a\neq0$, $b=0$ 时，无心． **5**．$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$． **6**．$d=5$，顶点$\left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$. **7**．$I_3=0$； $\lambda:\mu:\nu=\sqrt{|A|}:\sqrt{|B|}:\sqrt{|C|}$，其中 A, B, C 为 I_3 中的 a, b, c 的代数余子式． **8**．$z=0$； $x^2+y^2-z^2-ax=0$； $a\neq0$ 时，为单叶双曲面； $a=0$ 时，为锥面．

习题 8·4 **1**．(1) $k=6, 12, 18$； $x+y+2z=0$, $x+y-z=0$, $x-y+1=0$； (2) $k=14, 26, 0$； $x+2y+3z+1=0$, $x+4y-3z+1=0$； (3) $k=3, 0, 0$； $x-y+z=0$. **2**．(1) $\frac{\lambda_1}{1}=\frac{\mu_1}{0}=\frac{\nu_1}{0}$, $\frac{\lambda_2}{0}=\frac{\mu_2}{1}=\frac{\nu_2}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\lambda_3}{0}=\frac{\mu_3}{-1}=\frac{\nu_3}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$； $x-1=0$, $y+z+1=0$, $y-z-1=0$； $x'^2+2y'^2+4z'^2$； (2) $\frac{\lambda_1}{-1}=\frac{\mu_1}{0}=\frac{\nu_1}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\lambda_2}{1}=\frac{\mu_2}{-2}=\frac{\nu_2}{1}=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{\lambda_3}{1}=\frac{\mu_3}{1}=\frac{\nu_3}{1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$； $x-z=0$, $x-2y+z=0$； $\frac{3}{2}(x'^2+y'^2)$. **3**．顶点为$(-1, 2, 1)$，半顶角为 arc tg 3；轴的方向为 $1:2:-5$． **4**．球面．

习题 8·5 **1**．(1) $X^2+2Y^2+4Z^2=1$； (2) $X^2+3Y^2=Z$； (3) $6X^2-2Y^2=1$.

习题 8·6 **1**．(1) 椭圆面； (2) 椭圆抛物面； (3) 双曲抛物面； (4) 单叶双曲面； (5) 锥面． **6**．(1) $\lambda>1$ 时为椭圆抛物面； $\lambda<1$ 时为双曲抛物面； $\lambda=1$ 时为抛物柱面． (2) 用数轴表示就得：



(3) 用数轴表示就得：



习题 8·7 **1**．(1) $3X^2+4Y^2+8Z^2=1$； (2) $14X^2-26Y^2=2\sqrt{91}Z$； (3) $41X^2=28Y$； (4) $14X^2-27Y^2=1$； (5) $11X^2=16$.

2．$-\frac{\pi K_2}{I_2^2}\sqrt{I_2}$. **3**．$\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{-I_2}}{I_1}$. **4**．$\frac{2}{I_1}\sqrt{-K_1}$. **6**．(1) $I_1\neq0$, (i) $K_3>0$: 单叶双曲面； (ii) $K_3=0$: 锥面； (iii) $K_3<0$: 双

叶双曲面. (2) $I_1=0$, $K_3\neq 0$: 双曲抛物面. (3) $I_1=0$, $K_3=0$, (i) $K_2\neq 0$: 双曲抛物面; (ii) $K_2=0$: 一对相交平面.

复 习 题 八

1. $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2>p^2$. **2**. $\left(-\frac{1}{6},-\frac{5}{3},-\frac{13}{6}\right)$; $3x'^2+5y'^2+3z'^2-2y'z'+2z'x'-2x'y'=1$. **3**. $5x'^2+26y'^2+10z'^2+4y'z'+14z'x'+6x'y'=1$. **4**. 中心为$(5\lambda-2,\ 4\lambda-1,\ 3\lambda-2)$, $\lambda=\frac{2}{5}$. **5**. $d=-56$; 顶点为$(2,\ -5,\ 1)$; 旋转轴方程为$\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-1}{3}$. **6**. $-x=y=z$. **7**. (1) $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$; (2) $(ay-bx)^2-2cz(a^2+b^2-ax-by)+(a^2+b^2-c^2)z^2=0$ 与 (1) 的曲面的交线. **8**. (1) $k=2,\ 3,\ 6$; $x-z-2=0$, $x+y+z+4=0$, $x-2y+z-1=0$; (2) $k=14,\ 27,\ 0$; $2x-y+3z-1=0$, $x+5y+z-2=0$; (3) $k=3,\ 0,\ 0$; $x-y+z=0$. **9**. (1) $3X^2+2Y^2-4Z^2=4$; (2) $2X^2-Y^2+\sqrt{2}Z=0$; (3) $14X^2+42Y^2=1$; (4) $X^2+2Y^2-4Z^2=0$. **10**. (1) $3X^2+6Y^2-2Z^2=1$; (2) $7X^2-2Y^2=\frac{4}{7}\sqrt{14}Z$; (3) $3X^2+2Y^2=2$; (4) $7X^2-3=0$. **11**. $-\frac{4\pi K_3}{3I_3^2}\sqrt{-K_3}$. **12**. $\lambda<0$ 或 $0<\lambda<\frac{1}{2}$ 时为单叶双曲面; $\lambda>\frac{1}{2}$ 时为双叶双曲面; $\lambda=\frac{1}{2}$ 时为实锥面; $\lambda=0$ 时为双曲抛物面.

13. (1) $\mu>9$: $\lambda<4$ 时为双曲柱面; $\lambda>4$ 时为虚椭圆柱面; $\lambda=4$ 时为一对虚平行平面, (2) $\mu<9$: $\lambda<4$ 时为双曲柱面; $\lambda>4$ 时为实椭圆柱面; $\lambda=4$ 时为一对实平行平面, (3) $\mu=9$; $\lambda<4$ 时为一对实相交平面; $\lambda>4$ 时为一对虚相交平面; $\lambda=4$ 时为重合平面. **14**. $a=1$: 旋转双叶双曲面, 轴为 $x=0$, $y+z=0$; $a=-1$: 旋转单叶双曲面, 轴为 $x=0$, $y-z=0$. **15**. (1) $\mu>0$: $\lambda>1$ 时为虚椭圆面; $\lambda=1$ 时为一对虚平行平面; $-2<\lambda<1$ 时为单叶双曲面; $\lambda=-2$ 时为直圆柱面; $\lambda<-2$ 时为长球面; (2) $\mu<0$: $\lambda>1$ 时为扁球面; $\lambda=1$ 时为一对实平行平面; $-2<\lambda<1$ 时为双叶双曲面; $\lambda=-2$ 时为虚椭圆柱面; $\lambda<-2$ 时为虚椭圆面; (3) $\mu=0$: $\lambda>1$ 时为虚锥面; $\lambda=1$ 时为重合平面; $-2<\lambda<1$ 时为直圆锥面; $\lambda=-2$ 时为一对虚相交平面; $\lambda<-2$ 时为虚锥面.